CORRIGÉ DE LA SÉRIE DE TD N° 01

EXERCICE 01 :

$e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ C$; $m_{e^-} = 9{,}1 \times 10^{-31}\ kg$; $m_p = 1{,}672 \times 10^{-27}\ kg$;
$g = 9{,}81\ m.s^{-2}$; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$; $a_0 = 0{,}53 \times 10^{-10}\ m$;
$K = 9 \times 10^9\ N.m^2.C^{-2}$.

Force électrostatique :

$$\vec{F}_e = K\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_r \qquad \text{en module} \qquad F_e = K\frac{|q_1q_2|}{r^2} \qquad \text{AN:} \qquad F_e = 8{,}2 \times 10^{-8}\ N$$

Force d'attraction universelle :

$$\vec{F}_g = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{u}_r \qquad \text{en module} \qquad F_g = G\frac{m_1m_2}{r^2} \qquad \text{AN:} \qquad F_g = 3{,}6 \times 10^{-46}\ N$$

Poid de l'électron :

$$\vec{P}_{\text{électron}} = m_{e^-}.\vec{g} \qquad \text{en module} \qquad P_{\text{électron}} = m_{e^-}.g \qquad \text{AN:} \qquad F_e = 8{,}92 \times 10^{-30}\ N$$

Poid du proton :

$$\vec{P}_{\text{proton}} = m_p.\vec{g} \qquad \text{en module} \qquad P_{\text{proton}} = m_p.g \qquad \text{AN:} \qquad F_e = 1{,}64 \times 10^{-26}\ N$$

Conclusion :
Les forces gravitationnelles sont négligeables par rapport à la force électrostatique dans le cas des petites particules (électrons, protons, ions …)

EXERCICE 02 :

Sphères conductrices : déplacement de charges (électrons).
Sphères identiques : équi-répartition des charges.

Mise en contact des sphères (réunion) : $Q_{\text{tot}} = q_1 + q_2$
Séparation des deux sphères (après équilibre) :

$$\boxed{q_1' = q_2' = \frac{Q_{\text{tot}}}{2} = \frac{q_1+q_2}{2}}$$

a) $q_1 = 3 \times 10^{-8}\ C$ et $q_2 = 0\ C$ $\Rightarrow$ $\boxed{q_1' = q_2' = 1{,}5 \times 10^{-8}\ C}$
b) $q_1 = 30\ nC$ et $q_2 = 8 \times 10^{-8}\ C$ $\Rightarrow$ $q_1 = 30 \times 10^{-9}\ C$ et $q_2 = 8 \times 10^{-8}\ C$
Donc $\boxed{q_1' = q_2' = 5{,}5 \times 10^{-8}\ C}$
c) $q_1 = 0{,}03\ \mu C$ et $q_2 = -8 \times 10^4\ pC$ $\Rightarrow$ $q_1 = 0{,}03 \times 10^{-6}\ C$ et $q_2 = -8 \times 10^{-8}\ C$
Donc $\boxed{q_1' = q_2' = 5{,}5 \times 10^{-8}\ C}$

EXERCICE 03 :

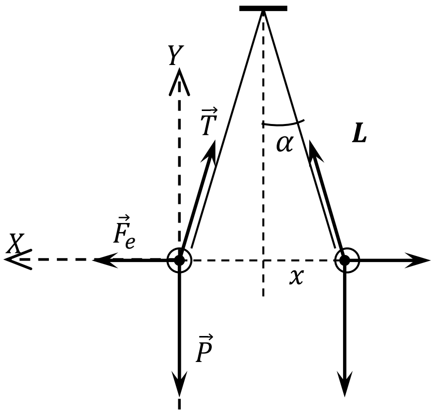
$$q_1 = q_2 = q \quad \text{et} \quad r_{12} = 10\ cm = 0{,}01\ m$$

$$\vec{F}_{12} = K\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_r \qquad \text{en module} \qquad F_{12} = K\frac{|q_1q_2|}{r^2} = K\frac{q^2}{r^2}$$

D'où

$$\boxed{q = \sqrt{\frac{r^2.F_{12}}{K}}} \qquad \text{AN:} \qquad \boxed{q = 2{,}35 \times 10^{-9}\ C}$$

EXERCICE 04 :



Principe fondamental de la dynamique

$$\vec{F}_e + \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

Projection :

Sur OX : $\quad F_e - T.\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad T.\sin\alpha = F_e = K\dfrac{q^2}{r^2}$

Sur OY : $\quad -P + T.\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad T.\cos\alpha = m.g$

En divisant

$$\tan\alpha = \frac{F_e}{P} = \frac{K.q^2}{m.g.r^2}$$

Comme

$$r = 2.x = 2.l.\sin\alpha$$

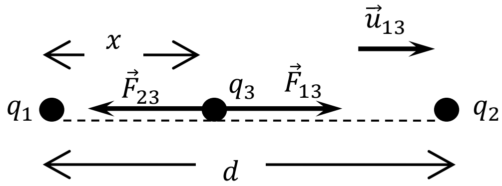
Donc

$$q = \sqrt{\frac{4m.g.L^2.\sin^2\alpha.\tan\alpha}{K}}$$

Dans le cas où α est très petit $\quad \tan\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha\ (rad)$

$$\boxed{q = \sqrt{\frac{4m.g.L^2.\alpha^3}{K}}} \qquad \text{AN:} \qquad \boxed{q = 2{,}09 \times 10^{-7}\ C}$$

EXERCICE 05 :



Force appliquée par q_1 sur q_3.

$\vec{F}_{13} = K\dfrac{q_1 q_3}{r_{13}^2}\vec{u}_{13} \qquad$ en module $\qquad F_{13} = K\dfrac{|q_1 q_3|}{r_{13}^2} = K\dfrac{q^2}{x^2}$

Force appliquée par q_2 sur q_3.

$\vec{F}_{23} = K\dfrac{q_2 q_3}{r_{23}^2}\vec{u}_{23} \qquad$ en module $\qquad F_{23} = K\dfrac{|q_2 q_3|}{r_{23}^2} = \dfrac{1}{9}K\dfrac{q^2}{(d-x)^2}$

Force totale (vecteur) :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \left(K\frac{q^2}{x^2} - \frac{1}{9}K\frac{q^2}{(d-x)^2}\right).\vec{u}_{13}} \qquad \text{avec} \qquad \vec{u}_{23} = -\vec{u}_{13}$$

Condition d'équilibre de :

$$\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \vec{0} \qquad \text{en module} \qquad F_{13} = F_{23} \quad \Rightarrow \quad K\frac{q^2}{x^2} = \frac{1}{9}K\frac{q^2}{(d-x)^2}$$

D'où

$$x^2 = 9(d-x)^2 \qquad \text{solutions} \qquad \begin{cases} x = +3(d-x) \\ x = -3(d-x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{4}d \\ x_2 = \dfrac{3}{2}d \end{cases}$$

La solution $x_2 = (3/2)d$ est refusée car elle se trouve en dehors du domaine $[q_1, q_2]$.
Donc, la position d'équilibre

$$\boxed{x_0 = \frac{3}{4}d = 0{,}75.d}$$

EXERCICE 06 :

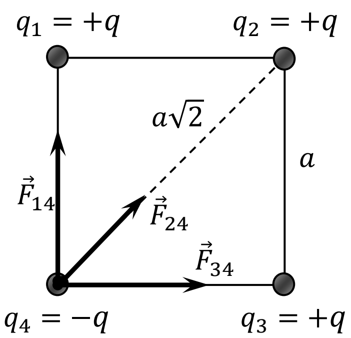
$\vec{F} = \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34}$ Somme vectorielle

Calculons les modules des forces appliquées à q_4.

$$\vec{F}_{14} = K\frac{q_1 q_4}{r_{14}^2}\vec{u}_{14} = -K\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_{14} \quad \text{en module} \quad F_{14} = K\frac{|q_1 q_4|}{r_{14}^2} = K\frac{q^2}{a^2}$$

$$\vec{F}_{24} = K\frac{q_2 q_4}{r_{24}^2}\vec{u}_{24} = -K\frac{q^2}{2.a^2}\vec{u}_{24} \quad \text{en module} \quad F_{24} = K\frac{|q_2 q_4|}{r_{24}^2} = K\frac{q^2}{2.a^2}$$

$$\vec{F}_{34} = K\frac{q_3 q_4}{r_{34}^2}\vec{u}_{14} = -K\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_{34} \quad \text{en module} \quad F_{34} = K\frac{|q_3 q_4|}{r_{34}^2} = K\frac{q^2}{a^2}$$



En utilisant la symétrie du problème

$$'\vec{F}' = \vec{F}_{14} + \vec{F}_{34} \quad \text{en module} \quad F' = \sqrt{F_{14}^2 + F_{34}^2} = F_{14}.\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad F' = \sqrt{2}K\frac{q^2}{a^2}$$

$\vec{F}'$ à la même direction que $\vec{F}_{24}$ (diagonale) et le même sens. Donc :

$$\vec{F} = \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34} = \vec{F}' + \vec{F}_{24} \quad \text{en module} \quad \boxed{F = F' + F_{24} = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)K\frac{q^2}{a^2}}$$

$\vec{F}$ est dirigé suivant la diagonale et oriente de la charge q_4 vers la charge q_2.

Remarque :
Si on veut utiliser les composantes suivants les axes (OXY) :

$$\vec{u}_{14} = -\vec{e}_y \quad ; \quad \vec{u}_{24} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y \quad ; \quad \vec{u}_{34} = -\vec{e}_x$$

Ce qui donne

$$\boxed{\vec{F} = -\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)K\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_{24} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)K\frac{q^2}{a^2}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)}$$

EXERCICE 07 :

$\vec{F} = \vec{F}_{15} + \vec{F}_{25} + \vec{F}_{35} + \vec{F}_{45}$ Somme vectorielle

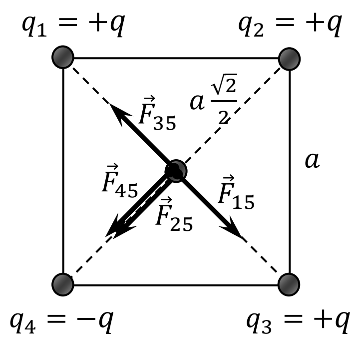
Calculons les modules des forces appliquées à q_5.

$$\vec{F}_{15} = K\frac{q_1 q_5}{r_{15}^2}\vec{u}_{15} = 4K\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_{15} \quad ; \quad \vec{F}_{25} = K\frac{q_2 q_5}{r_{25}^2}\vec{u}_{25} = 4K\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_{25}$$

$$\vec{F}_{35} = K\frac{q_3 q_5}{r_{35}^2}\vec{u}_{35} = 4K\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_{35} \quad ; \quad \vec{F}_{45} = K\frac{q_4 q_5}{r_{45}^2}\vec{u}_{45} = -4K\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_{45}$$

En module

$$F_{i5} = K\frac{|q_i q_5|}{r_{i5}^2} = 4K\frac{q^2}{a^2} \qquad \text{avec} \qquad r_{i5} = a\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (i = 1,2,3,4,5)$$



En utilisant la symétrie du problème

$$\vec{F}_{15} + \vec{F}_{35} = \vec{0}$$

Car $\vec{F}_{15}$ et $\vec{F}_{35}$ ont le même module et la même direction et des sens opposés.

D'où :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_{25} + \vec{F}_{45} = 2.\vec{F}_{25} = 8K\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_{25}}$$

Car $\vec{F}_{25}$ et $\vec{F}_{45}$ ont le même module et la même direction et le même sens.

Remarque :

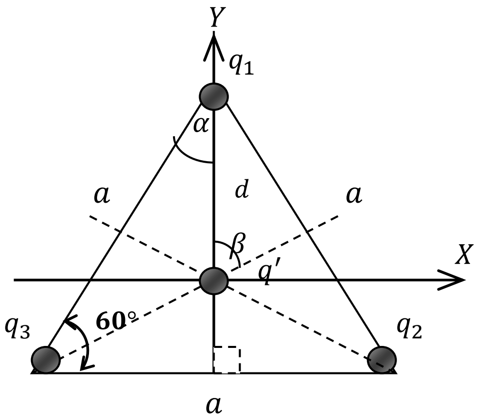
Si on veut utiliser les composantes suivants les axes (OXY) :

$$\vec{u}_{15} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(+\vec{e}_x - \vec{e}_y\right) \;;\; \vec{u}_{25} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{e}_x - \vec{e}_y\right) \;;\; \vec{u}_{35} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{e}_x + \vec{e}_y\right) \;;\; \vec{u}_{45} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(+\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)$$

Ce qui donne

$$\boxed{\vec{F} = 8K\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_{25} = -4\sqrt{2}.K\frac{q^2}{a^2}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)}$$

EXERCICE 08 :



1.

$$\alpha = 30° \quad \Rightarrow \quad \beta = 90 - \alpha = 60°$$

$$\cos\alpha = \frac{a/2}{d} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{a}{\sqrt{3}}}$$

2.

$$\vec{F}_i = K\frac{q_i q'}{r_i^2}\vec{u}_i = K\frac{q^2}{d^2}\vec{u}_i \qquad \text{en module} \qquad F_i = K\frac{q^2}{d^2}$$

En projetant suivant l'axe vertical (OY)

$$F_{1y} = -K\frac{q^2}{d^2} \qquad \text{et} \qquad F_{2y} = F_{3y} = K\frac{q^2}{d^2}\cos(\beta) = \frac{1}{2}K\frac{q^2}{d^2}$$

Donc

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0$$

En projetant suivant l'axe horizontal (OX)

$$F_{1x} = 0 \quad ; \quad F_{2x} = -K\frac{q^2}{d^2}\sin(\beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}K\frac{q^2}{d^2} \quad ; \quad F_{3x} = K\frac{q^2}{d^2}\sin(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}K\frac{q^2}{d^2}$$

Donc

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$$

Finalement

$$\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}}$$

3.

$$\vec{F}_i = K\frac{q_i q'}{r_i^2}\vec{u}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_1 = -K\frac{q^2}{d^2}\vec{u}_1 \; ; \; \vec{F}_2 = K\frac{q^2}{d^2}\vec{u}_2 \; ; \; \vec{F}_3 = K\frac{q^2}{d^2}\vec{u}_3 \qquad \text{en module} \qquad F_i = K\frac{q^2}{d^2}$$

En projetant suivant l'axe vertical (OY)

$$F_{1y} = K\frac{q^2}{d^2} \qquad \text{et} \qquad F_{2y} = F_{3y} = K\frac{q^2}{d^2}\cos(\beta) = \frac{1}{2}K\frac{q^2}{d^2}$$

Donc

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 2K\frac{q^2}{d^2} = 6K\frac{q^2}{a^2}$$

En projetant suivant l'axe horizontal (OX)

$$F_{1x} = 0 \quad ; \quad F_{2x} = -K\frac{q^2}{d^2}\sin(\beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}K\frac{q^2}{d^2} \quad ; \quad F_{3x} = K\frac{q^2}{d^2}\sin(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}K\frac{q^2}{d^2}$$

Donc

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$$

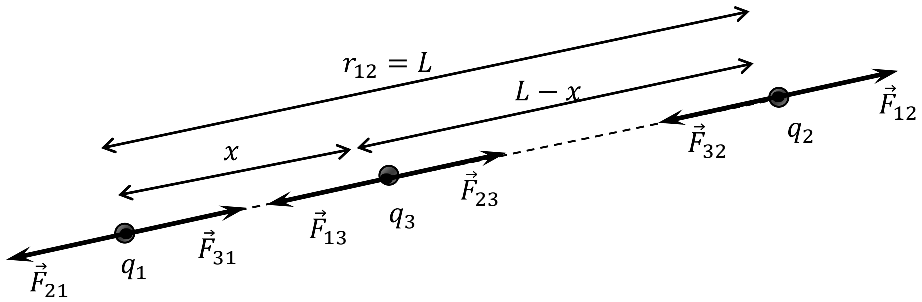
Finalement

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 6K\frac{q^2}{a^2}\vec{e}_y}$$

4. Application numérique :

$$\boxed{F = 9{,}6 \times 10^{-6}\,N}$$

EXERCICE 09 :



Pour que les trois charges soient en équilibre, il faut que la charge q_3 soit de signe opposé à $q_1 = q$ et $q_2 = 4q$, et placée entre les deux charges. On pose $q_3 = -\alpha . q \quad (\alpha > 0)$.

Expressions des forces

$$\vec{F}_{12} = K\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12} \quad ; \quad \vec{F}_{21} = K\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \text{en module} \quad F_{12} = F_{21} = K\frac{|q_1q_2|}{r_{12}^2} = K\frac{4q^2}{L^2}$$

$$\vec{F}_{13} = K\frac{q_1q_3}{r_{13}^2}\vec{u}_{13} \quad ; \quad \vec{F}_{31} = K\frac{q_1q_3}{r_{13}^2}\vec{u}_{31} = -\vec{F}_{13} \quad \text{en module} \quad F_{13} = F_{31} = K\frac{|q_1q_3|}{r_{13}^2} = K\frac{\alpha . q^2}{x^2}$$

$$\vec{F}_{23} = K\frac{q_2q_3}{r_{23}^2}\vec{u}_{23} \quad ; \quad \vec{F}_{32} = K\frac{q_2q_3}{r_{23}^2}\vec{u}_{32} = -\vec{F}_{23} \quad \text{en module} \quad F_{23} = F_{32} = K\frac{|q_2q_3|}{r_{23}^2} = K\frac{4\alpha . q^2}{(L-x)^2}$$

Condition d'équilibre :

$$\text{Pour } q_1 : \quad \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \vec{0} \quad \text{en module} \quad F_{21} = F_{31} \quad \Rightarrow \quad K\frac{4q^2}{L^2} = K\frac{\alpha . q^2}{x^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{Pour } q_2 : \quad \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = \vec{0} \quad \text{en module} \quad F_{12} = F_{32} \quad \Rightarrow \quad K\frac{4q^2}{L^2} = K\frac{4\alpha . q^2}{(L-x)^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{Pour } q_3 : \quad \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \vec{0} \quad \text{en module} \quad F_{13} = F_{23} \quad \Rightarrow \quad K\frac{\alpha . q^2}{x^2} = K\frac{4\alpha . q^2}{(L-x)^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

En utilisant l'équation (3).

$$K\frac{\alpha . q^2}{x^2} = K\frac{4\alpha . q^2}{(L-x)^2} \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = (L-x)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x = L - x \\ 2x = -L + x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}L \\ x_2 = -L \end{cases}$$

La solution $x_2 = -L$ est refusée car elle se trouve en dehors du domaine $[q_1, q_2]$. D'où :

$$\boxed{r_{12} = L} \quad ; \quad \boxed{r_{13} = x = \frac{1}{3}L} \quad ; \quad \boxed{r_{23} = L - x = \frac{2}{3}L}$$

En utilisant l'équation (1).

$$K\frac{4q^2}{L^2} = K\frac{\alpha . q^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad 4 = 9.\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_3 = -\frac{4}{9}q}$$

EXERCICE 10 :

D'après la figure ci-dessous.

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1. Champ :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = \sum_{i=1}^{N} K\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i \qquad \text{somme vectoreille}$$

En module

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = K\frac{q_i}{r_i^2} = 2K\frac{q}{a^2} \qquad (|\vec{u}_i| = 1)$$

Comme $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_3$ sont égaux en module et opposé en direction alors $\vec{E}_1 + \vec{E}_3 = \vec{0}$.
Comme $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_4$ sont égaux en module et opposé en direction alors $\vec{E}_2 + \vec{E}_4 = \vec{0}$.

Finalement

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = \vec{0}}$$

2. Potentiel :

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_3 = \sum_{i=1}^{N} K\frac{q_i}{r_i}$$

Comme

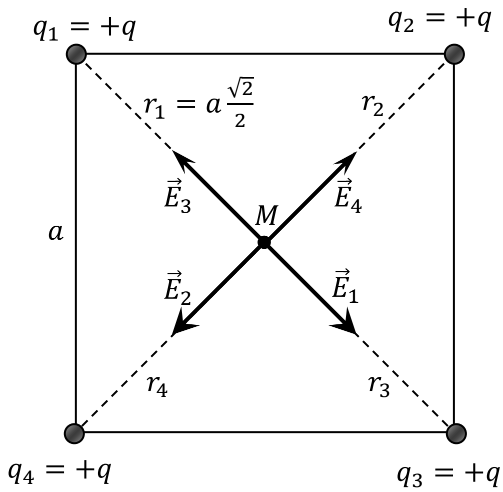
$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = +q$$

Alors

$$V(r) = 4.V_1 = 4.K\frac{q_1}{r_1}$$

Et

$$\boxed{V(r) = 4\sqrt{2}.K\frac{q}{a}}$$



EXERCICE 11 :

$q_1 = q$; $q_2 = -q$; $q_3 = q$ avec $A_1(-a, 0)$; $A_2(0,0)$; $A_3(a, 0)$; $M(0, y)$.

1.

$\vec{r}_1 = \overrightarrow{A_1M} = \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix}$; $\vec{r}_2 = \overrightarrow{A_2M} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$; $\vec{r}_3 = \overrightarrow{A_3M} = \begin{pmatrix} -a \\ y \end{pmatrix}$ et $r_1 = r_3 = \sqrt{a^2 + y^2}$; $r_2 = y$

$$V = \sum_{i=1}^{3} V_i = \sum_{i=1}^{3} K \frac{q_i}{r_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = Kq\left(\frac{2}{\sqrt{a^2 + y^2}} - \frac{1}{y}\right)}$$

2.

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = K\dfrac{q_1}{r_1^2}\vec{u}_1 = K\dfrac{q_1}{r_1^3}\vec{r}_1 \\ \vec{E}_2 = K\dfrac{q_2}{r_2^2}\vec{u}_2 = K\dfrac{q_2}{r_2^3}\vec{r}_2 \\ \vec{E}_3 = K\dfrac{q_3}{r_3^2}\vec{u}_3 = K\dfrac{q_3}{r_3^3}\vec{r}_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \vec{E}_1 = K\dfrac{q}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \\ \vec{E}_2 = K\dfrac{(-q)}{y^3}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \\ \vec{E}_3 = K\dfrac{q}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} -a \\ y \end{pmatrix} \end{cases}}$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{3} \vec{E}_i = K\frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = Kq\left\{\frac{1}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{y^3}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} -a \\ y \end{pmatrix}\right\}$$

D'où

$$\boxed{\vec{E} = Kq\left(\frac{2y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{1}{y^2}\right).\vec{e}_y}$$

3.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = -\frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{e}_y \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Kq\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{\sqrt{a^2 + y^2}} - \frac{1}{y}\right) = Kq\left(\frac{-2y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{1}{y^2}\right)$$

Et

$$\boxed{\vec{E} = Kq\left(\frac{2y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{1}{y^2}\right).\vec{e}_y}$$

4.

$$U_{\text{syst}} = \sum_i \sum_j U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j K\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + K\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + K\frac{q_2 q_3}{r_{23}} \qquad (i \neq j)$$

Avec $r_{12} = r_{23} = a$ et $r_{13} = 2a$. Donc

$$U_{\text{syst}} = \frac{K.q^2}{a}\left(\frac{1}{2} - 2\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{\text{syst}} = -\frac{3}{2}K\frac{q^2}{a}}$$

5.

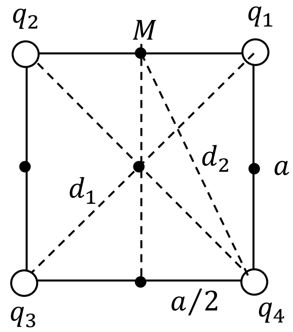
$$V = Kq\left(\frac{2}{\sqrt{a^2 + y^2}} - \frac{1}{y}\right) \quad \text{avec} \quad y = a \quad \text{et} \quad q' = q$$

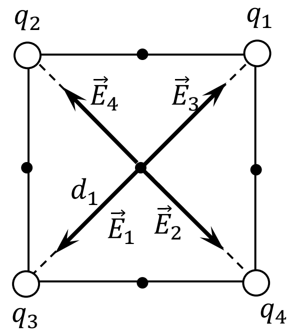
$$\boxed{U(q') = q'.V = K\frac{q^2}{a}\left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

EXERCICE 12 :

Calculons d'abord les distances d_1 et d_2.

$$d_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \quad ; \quad d_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$





1. Calculons le potentiel au point O.

$$V_O = \sum_i V_i = \sum_i K\frac{q_i}{r_i} = Kq\sum_i \frac{1}{r_i}$$

Avec

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = d_1 = a.\sqrt{2}/2$$

Donc

$$\boxed{V_O = 4\sqrt{2}.K\frac{q}{a}}$$

2. Calculons le vecteur champ au point O.

$$\vec{E}_O = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i K\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

Avec

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = d_1 = a.\sqrt{2}/2$$

En module

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = 2K\frac{q}{a^2}$$

Comme $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_3$ ont la même direction et opposé en module alors $\vec{E}_1 + \vec{E}_3 = \vec{0}$.
De même, $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_4$ ont la même direction et opposé en module alors $\vec{E}_2 + \vec{E}_4 = \vec{0}$.
Donc :

$$\boxed{\vec{E}_O = \vec{E}_1 + \vec{E}_3 + \vec{E}_2 + \vec{E}_4 = \vec{0}}$$

3. Calculons le potentiel au point M.

$$V_M = \sum_i V_i = \sum_i K\frac{q_i}{r_i} = Kq\sum_i \frac{1}{r_i}$$

Avec

$$r_1 = r_2 = a/2 \quad \text{et} \quad r_3 = r_4 = d_2 = a.\sqrt{5}/2$$

Donc

$$\boxed{V_M = 4\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)K\frac{q}{a}}$$

4. Calculons l'énergie potentielle du système.

$$U_{\text{syst}} = \frac{1}{2}\sum_i\sum_i U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_i\sum_i K\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

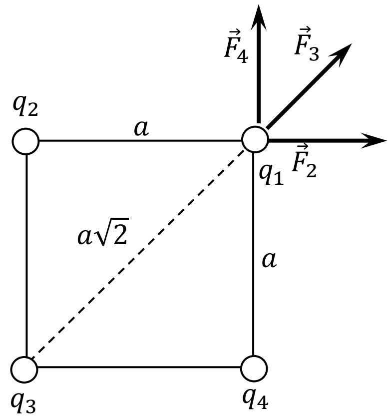
Avec

$$q_i = q \quad ; \quad r_{12} = r_{14} = r_{23} = r_{34} = a \quad ; \quad r_{13} = r_{24} = a\sqrt{2}$$

D'où

$$\boxed{U_{\text{syst}} = (4 + \sqrt{2})K\frac{q^2}{a}}$$

5. La force appliquée sur la charge q_1.



$$\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = Kq^2 \sum_i \frac{1}{r_{i1}^2}\vec{u}_i$$

En module

$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = K\frac{q^2}{a^2} \quad \text{et} \quad |\vec{F}_3| = K\frac{q^2}{2a^2}$$

En utilisant la symétrie

$$\vec{F}' = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$$

En module

$$|\vec{F}'| = \sqrt{|\vec{F}_2|^2 + |\vec{F}_4|^2} = \sqrt{2}.|\vec{F}_2| \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}'| = \sqrt{2}.K\frac{q^2}{a^2}$$

Comme $\vec{F}'$ et $\vec{F}_3$ sont parallèles et dans le même sens

$$\boxed{|\vec{F}| = |\vec{F}'| + |\vec{F}_3| = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right).K\frac{q^2}{a^2}}$$

6. Calculons la charge q_5.

Pour que la force appliquée sur la charge q_1 soit nulle, il faut que la force $\vec{F}_5$ appliquée par la nouvelle charge q_5 ai le même module que $\vec{F}$ et opposée en direction. Donc le signe de q_5 est négatif $(q_5 < 0)$.

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_5| \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right).K\frac{q^2}{a^2} = K\frac{|q_1 q_5|}{r_{15}^2} \quad \text{avec} \quad r_{15} = d_1 = a\sqrt{2}/2$$

Donc

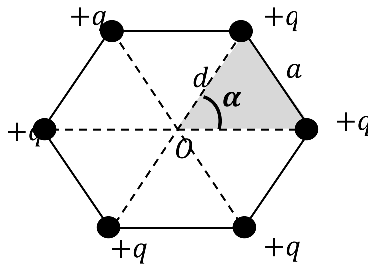
$$|q_5| = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{2}).q \quad \text{et} \quad \boxed{q_5 = -\frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{2}).q}$$

En utilisant la symétrie les forces appliquées aux charges q_2 , q_3 et q_4 sont nulles.

Et puisque on a toujours $\vec{E}_O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(q_5) = q_5.\vec{E}_O = \vec{0}$

Donc la force appliquée sur chaque charge est nulle.

EXERCICE 13 :



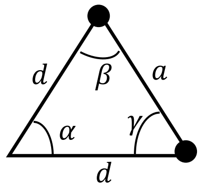
1. Calcul de la distance d.

Puisque les charges sont placés sur les sommets d'un hexagone régulier donc l'angle α est égal à :

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3}\ rad$$

Les deux cotés étant égaux d. donc les angles β et γ sont égaux.

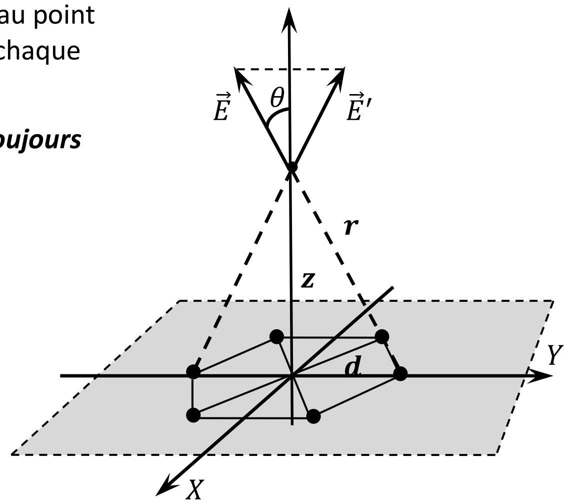
$$\beta = \gamma \quad et \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi \quad \Rightarrow \quad \beta = \gamma = \frac{\pi}{3} = \alpha$$



D'où le triangle est équilatéral (tous ces cotés sont égaux) et $\boxed{d = a}$.

2. Puisque chaque charge possède une charge symétrique de même signe et de même valeur par rapport à (OZ). La somme des champs au point M est parallèle à (OZ). En faisant la somme des champs pour chaque paire symétrique on trouve $\boxed{\vec{E}_{\text{tot}} \parallel \vec{e}_z}$.

Le champ total en un point situé sur l'axe de symétrie (OZ) est toujours parallèle à l'axe de symétrie (OZ).



3. Le champ crée par une seule charge $+q$ est donné par

$$\vec{E}_i = K\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i \qquad \text{avec} \qquad q_i = +q \quad \text{et} \quad r_i = r = \sqrt{d^2 + z^2}$$

En module.

$$E_i = K\frac{q}{r^2} = K\frac{q}{a^2 + z^2}$$

En projetant sur l'axe (OZ) : $\quad E_{iz} = E_i.\cos\theta.$

$$\text{Avec} \quad \cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \qquad \text{donc} \quad E_{iz} = K\frac{q}{a^2 + z^2}\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \qquad \text{et} \quad E_{iz} = Kq\frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

En faisant la somme pour les six (06) charges le module du champ total au point M.

$$E_M = 6Kq\frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \qquad \text{et le vecteur champ total} \qquad \boxed{\vec{E}_M = 6Kq\frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}\vec{e}_z}$$

4. Potentiel crée par une seule charge :

$$V_i = K\frac{q_i}{r_i} = K\frac{q}{r} \qquad \Rightarrow \qquad V_i = K\frac{q}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

Potentiel total est une somme scalaire des potentiels V_i.

$$V_M = \sum_{i=1}^{6} V_i = \sum_{i=1}^{6} K\frac{q_i}{r_i} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_M = 6K\frac{q}{r} = 6K\frac{q}{\sqrt{a^2 + z^2}}}$$

5. Recalculons $\vec{E}_M$ à partir de V_M.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z \qquad ; \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 6Kq\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right) = 6Kq\left(\frac{-z}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\right)$$

Donc

$$\boxed{\vec{E}_M = 6Kq\frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}\vec{e}_z}$$

EXERCICE 14 :

$q_1 = q_2 = \frac{-q}{2}$; $q_3 = q_4 = q$ avec $A_1(a,0,0)$; $A_2(-a,0,0)$; $A_3(0,a,0)$; $A_4(0,-a,0)$; $M(0,0,z)$

1.

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{A_1M} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \; ; \; \vec{r}_2 = \overrightarrow{A_2M} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \; ; \; \vec{r}_3 = \overrightarrow{A_3M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ z \end{pmatrix} \; ; \; \vec{r}_4 = \overrightarrow{A_4M} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ z \end{pmatrix}$$

Et les modules

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \sqrt{a^2 + z^2}$$

$$V = \sum_{i=1}^{4} V_i = \sum_{i=1}^{4} K \frac{q_i}{r_i} \quad \Rightarrow \quad V = K \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \quad \text{et} \quad \boxed{V = K \frac{q}{\sqrt{a^2+z^2}}}$$

2.

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = K \frac{q_1}{r_1^2} \vec{u}_1 = K \frac{q_1}{r_1^3} \vec{r}_1 \\ \vec{E}_2 = K \frac{q_2}{r_2^2} \vec{u}_2 = K \frac{q_2}{r_2^3} \vec{r}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{E}_3 = K \frac{q_3}{r_3^2} \vec{u}_3 = K \frac{q_3}{r_3^3} \vec{r}_3 \\ \vec{E}_4 = K \frac{q_4}{r_4^2} \vec{u}_4 = K \frac{q_4}{r_4^3} \vec{r}_4 \end{cases}$$

En remplaçant

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = -\frac{1}{2} K \frac{q}{(a^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \\ \vec{E}_2 = -\frac{1}{2} K \frac{q}{(a^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{E}_3 = K \frac{q}{(a^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ z \end{pmatrix} \\ \vec{E}_4 = K \frac{q}{(a^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{4} \vec{E}_i = K \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = K \frac{q}{(a^2+z^2)^{3/2}} \left\{ -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

D'où

$$\boxed{\vec{E} = Kq \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}} . \vec{e}_z}$$

3. Application numérique :

$$\boxed{V = 60 \; Volts} \quad ; \quad \boxed{E = 430 \; Volts.m^{-1}}$$