

## عنوان المحاضرة

### مسائل النقل (حالة التدنئة)

تعتبر مسائل النقل من أهم التطبيقات البرمجة الخطية حيث تستخدم النماذج الخطية لمعالجة هذه المشكلة، وهدف من خلالها للوصول إلى الأسلوب الأمثل لتوزيع الوحدات أو المنتجات المحصل عليها من مصادر عرض مختلفة (شركات، مصانع، مراكز....)، إلى مواقع الطلب بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل زمن ...

يمكن استخدام طريقة السامبلاكس لحل مشكلة النقل، إلا أن هذه الطريقة تحتاج منا القيام بالعديد من الخطوات والعمليات الحسابية المعقدة، حيث أنه تم التغلب على هذه المشاكل من خلال ما نسميه بجدول النقل.

وقد كان هيتشكوك HITCHCOCK أول من وضع الصيغة الأولية لطريقة النقل في 1941، ثم جاءت مساهمة كوبمانز KOOPMANS.

#### 1- جدول النقل:

يمكن التعبير عن الاطار العام لمشكلة النقل بالصيغة الجدولية التي تمثل مبدأ لإيجاد الحل الأولي الذي يمكننا من الوصول للحل النهائي و المتمثل في تحقيق أقل تكلفة ممكنة من اجمالي التكاليف.

يعبر عن الصيغة الجدولية لمشكلة النقل بالشكل المصفوفي حيث عدد صفوفها  $M$ ، و التي تمثل المصادر (مراكز التوزيع)، و عدد أعمدها  $N$ ، و التي تمثل مراكز القبول والاستلام.

كما هو موضح في الجدول التالي :

مراكز مصادر	N1	N2	N3	.....	Nn	العرض
M1	$C_{11}$ $X_{11}$	$C_{12}$ $X_{12}$	$C_{13}$ $X_{13}$	.....	$C_{1n}$ $X_{1n}$	a1
M2	$C_{21}$ $X_{21}$	$C_{22}$ $X_{22}$	$C_{23}$ $X_{23}$	.....	$C_{2n}$ $X_{2n}$	a2
M3	$C_{31}$	$C_{32}$	$C_{33}$	.....	$C_{3n}$	a3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Mm	$C_{m1}$ $X_{m1}$	$C_{m2}$ $X_{m2}$	$C_{m3}$ $X_{m3}$	.....	$C_{mn}$ $X_{mn}$	a <sub>m</sub>
الطلب	b1	b2	b3	.....	bn	

حيث :  $C_{ij}$  تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i الى المركز j.

$X_{ij}$  تمثل عدد الوحدات المنقولة من المصدر i الى المركز j.

الفرضية الأساسية لمسألة النقل هي أن مجموع العرض مساوي لمجموع الطلب أي

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

وهذه الحالة نسميها بنموذج النقل المتوازن.

ويمكن صياغة النموذج الرياضي لمشاكل النقل كمايلي:

## 2-النموذج الرياضي لمسألة النقل:

أ- دالة الهدف بما أن الهدف هو تدنئة التكاليف بتكون دالة الهدف :

$$\text{Min}Z = \sum_{i=1}^{m,n} P_{ij} X_{ij}$$

ب- القيود الاضافية :

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

$$X_{ij}, C_{ij} \geq 0$$

## 2- حل مشكلة النقل:

بعد اعداد الصيغة الجدولية لمشكلة النقل نبحت عن الحل الأساسي أو الأولي، وهناك ثلاث طرق

يمكن استخدامها:

✓ طريقة الزاوية الشمالية الغربية؛

✓ طريقة أقل التكاليف؛

✓ طريقة فوجل.

ثم بعد الحصول على الحل الأساسي يتم التحقق ما إذا كان هذا الحل هو الأمثل عن طريقة اجراء

اختبارات :

✚ طريقة التخطي (المسار المتعرج، الحجر المتنقل):

✚ طريقة التوزيع المعدل.

## 1-2 الحصول على الحل الأساسي:

إن أول مرحلة في الحصول على الحل الأساسي الأولي هي إيجاد مجموعة الحلول الأساسية المقبولة والمعبر عنها بالمعادلة  $(m+n-1)$ ، فإذا كان لدينا مثلاً 3 معادلات تعكس الطلب و 4 معادلات تعكس العرض تكون مجموعة الحلول الممكنة  $(6=3+4-1)$ .

## 2-2 طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرق للوصول إلى الحل الأساسي الأولي وتقوم هذه الطريقة على البدء في التوزيع من المصادر إلى المراكز، فإننا نبدأ بالخانة (1.1)، ونعطيها أكبر قيمة ممكنة وهذه القيمة تكون مقيدة بأصغر قيمة بين عرض المصدر 1 و طلب المركز 1 أي  $\text{Min}(S1.D1)$ . وعند الانتقال إلى الخانة 2 نكون أمام حالتين:

- اما ان المصدر الأول قد نقل كل ما لديه و المركز الأول لم يتلقى كامل الطلب، و بالتالي هو بحاجة إلى اكمال النقص من مصدر آخر، و عليه ننتقل إلى السطر الثاني للنقطة (2.1). و نعطيها أكبر قيمة ممكنة مع مراعات القيم الهامشية.
- إما أن المركز الأول قد حصل على كل ما يحتاج إليه و المصدر الأول لم يتخلص من كل ما لديه من المعروض و بالتالي يجب عليه توجيه الفائض إلى مركز آخر، و عليه التنقل يكون نحو العمود التالي للنقطة (1.2)، و تخصص لها أكبر قيمة ممكنة مع المحافظة على المتطلبات الهامشية.

مثال: (مولاي بوعلام، محاضرات و تطبيقات في بحث العمليات، جامعة البويرة. 2016/2017)

تحتوي إحدى المؤسسات الانتاجية على ثلاث مخازن في مواقع مختلفة كما أن لها ثلاث مراكز توزيع، كانت تكاليف النقل للوحدة الواحدة من السلع و حجم التخزين في كل مخزن و الاحتياجات لكل مركز توزيع مبينة في الجدول التالي :

مراكز مصادر	D1	D2	D3	العرض
A	31 300	21 100	42	400
B	20	21 800	30 200	1000
C	23	20	15 600	600
الطلب	300	900	800	2000 2000

- نبدأ بأول خانة (1.1) و نلاحظ أن أقل قيمة بين الطلب و العرض هي 300 و بالتالي يمكن للمصدر A أن يمنح المركز D1 300 وحدة ، و بالتالي يتم تلبية طلبية المركز D1.
- ننتقل إلى المركز D2، تقدر طلبيته بـ 900 وحدة و تبقى في المصدر A 100 وحدة يمنحها له.
- ثم ننتقل إلى المصدر B و الذي يحوي 1000 وحدة فيمنح 800 وحدة المتبقية لطلبية D2. و بالتالي يتم تلبية طلبية D2.
- ثم ننتقل إلى المركز D3، الذي تقدر طلبيته بـ 800 وحدة يتحصل على 200 وحدة من المصدر B، و 600 وحدة من المصدر C.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad \text{نلاحظ بعد عمليات النقل أن الجدول في توازن}$$

و أيضا عدد الخلايا المملوءة خمسة خلايا وهي تساوي عدد الحلول الممكنة (1-3+3).

و التكلفة الاجمالية للنقل :

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} = (31*300) + (21*100) + (21*800) + (30*200) + (15*600) \\ = 43200$$

3-2 اختبار أمثلية الحل :

إن الحل الأساسي المتوصل إليه هو حل أولي وقد لا يكون هو الحل الأمثل للمسألة.  
ولمعرفة ما إذا كان هذا الحل هو الذي يؤدي بنا إلى حل المسألة نستخدم طريقتين:

أ/ طريقة التخطي :

حيث تقوم من خلال هذه الطريقة بالتعامل مع الخلايا غير الداخلة في الحل والتي من المرجح أنها تقوم بتدنية التكاليف الكلية عند ادخالها للحل الاساسي، و عليه يجب علينا ايجاد قيم التكاليف الحدية (تكلفة الوحدة الواحدة) لكل خلية غير داخلة في الحل.

مثال : في المثال السابق كان جدول الحل الاساسي

	D1	D2	D3	العرض
A	31 300	21 100	42	400
B	20	21 800	30 200	1000
C	23	20	15 600	600
الطلب	300	900	800	2000 2000

نبدأ بالخلية A.D3 إذا مررنا وحدة واحدة عبرها يخلت التوازن ونعدله بإضافة و طرح (+-1)

و يكون بالشكل الموالي :

	D2	D3
21	21 100	42 +1
21	21 800	30 200

(A, D3) ↓

$$\delta = (1*42) + (-1*21) + (1*21) + (-1*30) = 12$$

δ: التكلفة الحدية

بنفس الطريقة نستمر مع الخلايا الفارغة :

$$\delta = 20 - 31 + 21 - 21 = -11 : B.D1 \text{ الخلية}$$

$$\delta = 23 - 31 + 21 - 21 + 30 - 15 = 7 : C.D1 \text{ الخلية}$$

$$\delta = 20 - 21 + 30 - 15 = 14 : C.D2 \text{ الخلية}$$

نلاحظ أن هناك تكلفة حدية سالبة، ومنه الحل الاساسي لا يعتبر الامثل وهناك مسار يغطي تكلفة أقل، وبالتالي نحسن النموذج عبر ادخال الخلية التي تحوي اقل تكلفة وهي الخلية B.D1.

ونقوم بإضافة أو طرح أقل قيمة متواجدة في الزوايا السالبة.

وفي المثال السابق:

	D1	D2
A	31 -A 300	21 400 100 x
B	20 +A 300	21 500 800

ومنه يصبح النموذج المصحح بعد ادخال الخلية B.D1:

	D1	D2	D3	العرض
A	31	21	42	400
B	20	21	30	1000
C	23	20	15	600
الطلب	300	900	800	2000
				2000

بنفس الطريقة السابقة نتحقق من أمثلية الحل :

$$\delta = 31 - 21 + 21 - 20 = 11 : A.D1 \text{ الخلية}$$

$$\delta = 42 - 30 + 21 - 21 = 12 : A.D3 \text{ الخلية}$$

$$\delta = 23 - 20 + 30 - 15 = 18 : C.D1 \text{ الخلية}$$

$$\delta = 20 - 21 + 30 - 15 = 14 : C.D2 \text{ الخلية}$$

وعليه كل التكاليف الحدية موجبة وبالتالي نقبل بهذا الحل على أنه الأمثل.

ومن الملاحظ أن التكاليف ستخفض بمقدار  $\delta_{2,1} * 300 = 11 * 300 = 3300$

$$39900 = 3300 - 42300$$

وبحساب التكلفة الاجمالية من خلال الحل الأمثل نجد :

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} = (21 * 400) + (20 * 300) + (21 * 500) + (30 * 200) + (15 * 600) \\ = 39900$$

ب/ طريقة التوزيع المعدل:

تقوم هذه الطريقة على فروض أن  $V_j$  تعبر عن الأعمدة (المراكز) و  $U_i$  تعبر عن الأسطر (المصادر) و تنقسم هذه الطريقة إلى مرحلتين:

- مرحلة أولى نتعامل فيها مع القيم الداخلة في الحل الأساسي ونبدأ في حل المعادلات  $U_i + V_j = C_{ij}$  مع اعتبار أن  $U_1$  لأول معادلة مساوي لـ صفر 0. ثم نجد قيم  $U_i$ ،  $V_j$  الداخلة في الحل.
- وفي المرحلة الثانية نتعامل مع القيم الخارجة من الحل الأساسي ونجد القيم الحدية حيث

$$\delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j \text{ : نعتبرها بالعلاقة}$$



وفي المثال السابق :

$$U_1 + V_1 = 31 \rightarrow U_1 = 0 . V_1 = 31$$

$$U_1 + V_2 = 21 \rightarrow V_2 = 21 .$$

$$U_2 + V_2 = 21 \rightarrow U_2 = 0 .$$

$$U_2 + V_3 = 30 \rightarrow V_3 = 30 .$$

$$U_3 + V_3 = 15 \rightarrow U_3 = -15 .$$

$\delta$	$\delta_{IJ} = C_{ij} - U_i - V_j$	$U_i \cdot V_j$
12	42 - 0 - 30	$U_1 \cdot V_3$
-11	20 - 0 - 31	$U_2 \cdot V_1$
7	23 - (-15) - 31	$U_3 \cdot V_1$
14	20 - (-15) - 21	$U_3 \cdot V_2$

ونلاحظ أن هناك قيمة حدية سالبة أي لا يعتبر هذا الحل الامثل و نقوم بتعديل النموذج بنفس طريقة التخطي ثم نختبر بنفس الطريقة أمثلية الحل إلى أن نصل إلى ان جميع القيم الحدية موجبة لكي نقبل أمثلية الحل عندئذ.

#### 4-2 طريقة اقل تكلفة :

وهي من خلال تسميتها تعتمد على البدء بملاً الخلايا انطلاقاً من تتبع اقل التكاليف حيث نبدأ من الخلية التي تحمل أقل تكلفة و نقوم بتعبئتها كما رأينا في طريقة الزاوية الشمالية الغربية قم ننتقل إلى الخلية التي تحمل التكلفة الأعلى منها وهكذا إلى أن نتم الجدول، و من الملاحظ أنه في حالة تساوي تكلفتين عادة نقوم بالاختيار العشوائي ولكن نصطح في هذه الحالة على تعبئة الخلية التي تعطيني أكبر قيمة منقولة.

والمثال الموالي يوضح ذلك :

	N1	N2	N3	العرض
M1	3	2	4	25
		15	10	
M2	1	4	3	30
	20		10	
M3	4	2	5	35
		35		
الطلب	20	50	20	90
				90

	N1	N2	N3	العرض
M1	3	2	4	25
M2	1	4	3	30
M3	4	2	5	35
الطلب	20	50	20	90
				90

و بنفس الطرق السابقة يمكننا التأكد من أمثلية الحل.

## 5-2 طريقة فوجل :

و تسمى أيضا بطريقة الفروقات، حيث تقوم هذه الطريقة على ايجاد الحل الأولي عبر تحديد الفرق بين أقل تكلفتين أفقيا وعموديا، حيث يطلق على هذه الفروقات (أرقام فوجل)، ثم نختار أكبر رقم من الفروقات سواء في السطر أو العمود ثم نختار التكلفة الأقل المقابلة لهذا السطر أو العمود مع وجود ملاحظة أنه في حال تساوي أكثر من سطر أو عمود في القيمة الكبرى للفروقات نختار السطر أو العمود الذي يحتوي على تكلفة أقل.

ثم في المرحلة الموالية نملاً هذه الخانة (التي تحوي أقل تكلفة) ثم نعيد نفس الكرة مع الفروقات الثانية والثالثة إلى غاية الوصول إلى الحل الأولي.

وبالعمل بالمثل السابق نجد الحل الأولي باستخدام طريقة فوجل كمايلي :

	N1	N2	N3	العرض	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$
M1	3	2	4	25	1	2	2
		15	10				
M2	1	4	3	30	2	1	1
	20		10				
M3	4	2	5	35	2	3	/
		35					
الطلب	20	50	20	90			
$\Delta_1$	2	2	1				
$\Delta_2$	/	2	1				
$\Delta_3$	/	2	1				
$\Delta_4$	/	/	1				

و بنفس الطرق السابقة نتحقق من أمثلية الحل إما باستخدام طريقة التخطي أو باستخدام طريقة التوزيع المعدل.

### المصادر المعتمدة:

- محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006،
- علي مكيد، بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية، الجزء 2، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2016.
- مولاي بوعلام، محاضرات وتطبيقات في بحث العمليات، جامعة البويرة، 2016/2017