## حل التمرين 01 :

**1- كتابة البرنامج الرياضي للمسألة :**

دالة الهدف : بما ان الهدف هو البحث عن أفضل توليفات للنقل بين الموانئ و مراكز الاستقبال بأقل التكاليف فإن دالة الهدف في هذه المسألة هي دالة تدنئة للتكاليف و يمكن صياغة المعادلة بالشكل الرياضي العام :

$$MinZ=\sum_{i=1,j=1}^{m,n} C_{ij}X_{ij}$$

و يمكن ترجمتها حسب مثالنا إلى الشكل :

$$MinZ=\sum_{i=1,j=1}^{3,3} C_{ij}X_{ij}$$

بالاعتبار $C_{ij}$ يمثل تكاليف النقل للوحدة الواحدة.

$X_{ij}$ هي الكميات المنقولة .

**و دوال الطلب تكون بالشكل :**

$\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = b_j$ / - $X_{11} + X_{21} + X_{31} = b1$

- $X_{12} + X_{22} + X_{32} = b2$

- $X_{13} + X_{23} + X_{33} = b3$

**و دوال العرض تكون بالشكل :**

$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} = a_i$ / - $X_{11} + X_{12} + X_{13} = a1$

- $X_{21} + X_{22} + X_{23} = a2$

- $X_{31} + X_{32} + X_{33} = a3$

شرط التوازن : $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

شرط عدم السلبية : $X_{ij} , C_{ij} \geq 0$

هنا وضعنا 10 بالرغم أن الطلب 70 و العرض 80 لكن العرض قد تغير و انخفض إلى 10 لأننا وجهنا 70 وحدة ل و م أ

2- ايجاد الحال الأساسي :

أ- بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

| | و م أ | كندا | استراليا | العرض |
|---|---|---|---|---|
| ميناء الجزائر | 5 — 70 | 6 — 10 | 7 | 80 |
| ميناء وهران | 9 | 5 — 40 | 11 | 40 |
| ميناء عنابة | 13 | 12 — 20 | 8 — 40 | 60 |
| الطلب | 70 | 70 | 40 | 180 |

ننطلق في تعبئة الخلايا من الخلية 1.1 و هي التي تقع في الشمال الغربي

و دائما نراعي عند التعبئة ان نأخذ اقل قيمة بين الطلب و العرض بالإضافة إلى الانتباه للقيم الهامشية بعد كل عملية

عدد الحلول الممكنة هو 5 = 1-3+3

أقل تكلفة هي 5 و هي موجودة مرتين.
نختار الخلية التي تنقل أكبر كمية
في هذه الحالة التي امامنا نفس النتيجة نصل اليها
سواء نختار الخلية 1.1 أو الخلية 2.2.

ب- باستخدام طريقة التكلفة الدنيا:

| | و م أ | كندا | استراليا | العرض |
|---|---|---|---|---|
| ميناء الجزائر | 5 — 70 | 6 — 10 | 7 | 80 |
| ميناء وهران | 9 | 5 — 40 | 11 | 40 |
| ميناء عنابة | 13 | 12 — 20 | 8 — 40 | 60 |
| الطلب | 70 | 70 | 40 | 180 |

ننطلق في تعبئة الجدول من الخلية التي تحمل أقل تكلفة

و دائما نراعي عند التعبئة ان نأخذ اقل قيمة بين الطلب و العرض بالإضافة إلى الانتباه للقيم الهامشية بعد كل عملية

عدد الحلول المكنة هو 5 = 1-3+3

**ج- باستخدام طريقة فوجل (الفروقات):**

| | و م أ | كندا | استراليا | العرض | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ميناء الجزائر | 5 / 70 | 6 / 10 | 7 | 80 | 1 | 1 | 1 | |
| ميناء وهران | 9 | 5 / 40 | 11 | 40 | 4 | 6 | | |
| ميناء عنابة | 13 | 12 / 20 | 8 / 40 | 60 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| الطلب | 70 | 70 | 40 | 180 | | | | |
| 1 | 4 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | | 1 | 1 | | | | | |
| 3 | | 6 | 1 | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |

**ملاحظات:**

- عند تساوي عدد الأسطر و الأعمدة التي تعطينا أكبر رقم نختار التي تحمل اقل تكلفة و في حالة تساوي أيضا في أقل تكلفة نختار التي تنقل لنا اكبر كمية.
- السطر أو العمود الذي يتم تلبية حاجته يستبعد في المراحل الأخرى .
- عند بقاء خلية واحدة غير مستبعدة لا يتم احتساب الفرق فيها.

عدد الحلول الممكنة هو 5 = 1-3+3

**يلاحظ أن الطرق الثلاثة تعطينا نفس النتيجة في الحل الأساسي و يرجح أن يكون هذا الحل هو الأمثل و نستطيع أن نتحقق من ذلك من خلال استخدام طريقة التخطي أو التوزيع المعدل.**

**و بذلك تكون التكلفة الاجمالية في الحل الأساسي :**

$$Z = (5*70) + (6*10) + (5*40) + (12*20) + (8*40) = 350+60+200+240+320$$

$$\boxed{Z = 1170}$$

حل التمرين 2 :

للوصول لأقل تكلفة ممكنة لابد من ايجاد الحل الأساسي ثم الحل الأمثل و عليه و بما أن نص التمرين لم يحدد طريقة معينة للحل نختار طريقة أقل تكلفة.

| | N1 | N2 | N3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| M1 | 2 800 | 5 | 3 | 800 |
| M2 | 4 500 | 5 | 7 | 500 |
| M3 | 9 300 | 7 300 | 8 | 600 |
| M4 | 8 | 4 **600** | 3 **700** | 1300 |
| الطلب | 1600 | 900 | 700 | 3200 |

و يمكننا استخدام طريقة فوجل :

| | N1 | N2 | N3 | العرض | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M1 | 2 800 | 5 | 3 | 800 | 1 | 3 | 3 | | |
| M2 | 4 500 | 5 | 7 | 500 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| M3 | 9 300 | 7 300 | 8 | 600 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| M4 | 8 | 4 600 | 3 700 | 1300 | 1 | 4 | | | |
| الطلب | 1600 | 900 | 700 | 3200 | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | 4 | | | | | | |
| 2 | 2 | 1 | | | | | | | |
| 3 | 2 | 2 | | | | | | | |
| 4 | 5 | 2 | | | | | | | |

**ملاحظة:**

عند حساب أول فرق كانت أكبر قيمة هي 4 ، أي اننا نختار العمود الثالث لتعبئته و الملاحظ هنا أن العمود الثالث يحوي تكلفتين متساويتين 3 .

وكلتا الخليتين تسمح بنقل نفس الكمية 700.

الاختيار هنا يكون عشوائي و النتيجة تظهر مختلفة لكن تتفقان في الحل الأمثل.

يلاحظ من الطرق المقدمة أن شرط الحلول الممكنة محقق 6 = 1-3+4.

نتحقق من أمثلية الحل باستخدام طريقة التوزيع المعدل (نتابع مع نتائج طريقة التكلفة الدنيا):

$U_1 + V_1 = 2 \rightarrow U_1 = 0 .\ V_1 = 2$

$U_2 + V_1 = 4 \rightarrow U_2 = 2 .$

$U_3 + V_1 = 9 \rightarrow U_3 = 7 .$

$U_3 + V_2 = 7 \rightarrow V_2 = 0 .$

$U_4 + V_2 = 4 \rightarrow U_4 = 4 .$

$U_4 + V_3 = 3 \rightarrow V_3 = -1 .$

في هذه المرحلة نتعامل مع الخلايا الداخلة في الحل و نفترض أن $U_1 = 0$

| $\delta$ | $\delta_{IJ} = C_{ij} - U_i - V_j$ | $U_i . V_j$ |
|---|---|---|
| 5 | 5- 0 - 0 | $U_1 . V_2$ |
| 4 | 3- 0 +1 | $U_1 . V_3$ |
| 3 | 5 - 2 - 0 | $U_2 . V_2$ |
| 6 | 7 - 2 +1 | $U_2 . V_3$ |
| 2 | 8- 7 +1 | $U_3 . V_3$ |
| 2 | 8- 4 - 2 | $U_4 . V_1$ |

في هذه المرحلة نتعامل مع الخلايا الخارجة من الحل

بما ان جميع القيم الحدية موجبة نقبل بالحل الأساسي على أنه الحل الامثل

و عليه تكون التكلفة الاجمالية الدنيا :

Min Z= (2*800)+(4*500)+(9*300)+(7*300)+(4*600)+(3*700) = $\boxed{12900}$

بإمكاننا التحقق من هذه النتيجة باستخدام طريقة التخطي :

في طريقة التخطي نتعامل مع الخلايا الخارجة عن الحل:

نبدأ بالخلية الاولى U1 . V2 :

اذن التكلفة الحدية هي :

$\delta = (+1*5) + (-1*7)+(+1*9)+(-1*2)$

$\delta = 5-7+9-2$

$\delta = 5$

U1 . V2

| | N1 | N2 | N3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| M1 | 2 − 800 | 5 + | 3 | 800 |
| M2 | 4 500 | 5 | 7 | 500 |
| M3 | 9 + 300 | 7 − 300 | 8 | 600 |
| M4 | 8 | 4 600 | 3 700 | 1300 |
| الطلب | 1600 | 900 | 700 | 3200 |

**الخلية U1 . V3 :**

اذن التكلفة الحدية هي :

U1 . V3

| | N1 | N2 | N3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| M1 | 2 −λ 800 | 5 | 3 +λ | 800 |
| M2 | 4 500 | 5 | 7 | 500 |
| M3 | 9 +λ 300 | 7 −λ 300 | 8 | 600 |
| M4 | 8 | 4 +λ 600 | 3 −λ 700 | 1300 |
| الطلب | 1600 | 900 | 700 | 3200 |

$$\delta = (+1*3) + (-1*3)+(+1*4)+(-1*7)+(+1*9)+(-1*2)$$

$$\delta = 3-3+4-7+9-2$$

$$\delta = 4$$

**الخلية U2 . V2 :**

اذن التكلفة الحدية هي :

U2 . V2

| | N1 | N2 | N3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| M1 | 2 800 | 5 | 3 | 800 |
| M2 | 4 −λ 500 | 5 +λ | 7 | 500 |
| M3 | 9 +λ 300 | 7 −λ 300 | 8 | 600 |
| M4 | 8 | 4 600 | 3 700 | 1300 |
| الطلب | 1600 | 900 | 700 | 3200 |

$$\delta = (+1*5) + (-1*7)+(+1*9)+(-1*4)$$

$$\delta = 5 - 7 + 9 - 4$$

$$\delta = 3$$

**الخلية U2 . V3 :**

اذن التكلفة الحدية هي :

U2 . V3

| | N1 | N2 | N3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| M1 | 2 800 | 5 | 3 | 800 |
| M2 | 4 −λ 500 | 5 | 7 +λ | 500 |
| M3 | 9 +λ 300 | 7 −λ 300 | 8 | 600 |
| M4 | 8 | 4 +λ 600 | 3 −λ 700 | 1300 |
| الطلب | 1600 | 900 | 700 | 3200 |

$$\delta = (+1*7) + (-1*3)+(+1*4)+(-1*7)+(+1*9)+(-1*4)$$

$$\delta = 7 - 3 + 4 - 7 + 9 - 4$$

$$\delta = 6$$

**الخلية U3 . V3 :**

اذن التكلفة الحدية هي :

$$\delta = (+1*8) + (-1*3)+(+1*4)+(-1*7)$$

$$\delta = 8 - 3 + 4 - 7$$

$$\delta = 2$$

U3 . V3

| | N1 | N2 | N3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| M1 | 2 800 | 5 | 3 | 800 |
| M2 | 4 500 | 5 | 7 | 500 |
| M3 | 9 300 | 7 −λ 300 | 8 +λ | 600 |
| M4 | 8 | 4 +λ 600 | 3 −λ 700 | 1300 |
| الطلب | 1600 | 900 | 700 | 3200 |

**الخلية U4 . V1 :**

اذن التكلفة الحدية هي :

$$\delta = (+1*8) + (-1*9)+(+1*7)+(-1*4)$$

$$\delta = 8 - 9 + 7 - 4$$

$$\delta = 2$$

U4 . V1

| | N1 | N2 | N3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| M1 | 2 800 | 5 | 3 | 800 |
| M2 | 4 500 | 5 | 7 | 500 |
| M3 | 9 −λ 300 | 7 +λ 300 | 8 | 600 |
| M4 | 8 +λ | 4 −λ 600 | 3 700 | 1300 |
| الطلب | 1600 | 900 | 700 | 3200 |

**نلاحظ أن نفس النتائج محققة باستخدام الطريقتين .**

**ملاحظة: في حال استخدام طريقة فوجل و التوجه نحو الحل بالطريقة الثانية، فإننا نجد أن الحل الأساسي لا يعتبر الأمثل بوجود تكلفة حدية سالبة و نعدل النموذج لنحصل على نفس هذه النتائج.**

**حل التمرين 3 :**

1- **كتابة المسألة بصيغة رياضية :**

يمكن الرجوع إلى التمرين الاول للإجابة على هذا السؤال.

2- **اثبات أن المسألة تخضع لمسائل النقل:**

لاعتبار أي مسألة من مشاكل النقل يجب أن يتوفر لدينا شرطين أساسين هما تساوي الطلب مع العرض و عدم سلبية التكاليف.

و منه لدينا مجموع الطلب : 40+30+50= 120 و مجموع العرض 55+45+20 = 120

و بالتالي الشرطان محققان أي هذه المسألة تخضع لمشاكل النقل.

3- **ايجاد الحل الأمثل :**

أ- **ايجاد الحل الأساسي:** باستخدام طريقة أدنى تكلفة نجد :

| | الوحدة الاولى | الوحدة الثانية | الوحدة الثالثة | العرض |
|---|---|---|---|---|
| الجلفة | 1 / 40 | 4 / 15 | 5 | 55 |
| بوسعادة | 5 | 7 | 3 / 45 | 45 |
| تيارت | 10 | 8 / 15 | 9 / 5 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

**و نلاحظ أن شرط عدد الحلول الممكنة محقق**

**عدد الخلايا المملوءة 5 و هو مساوي لـ 1-3+3 حيث (1-3+3 تعبر عن m+n-1)**

**m: هو عدد الأسطر (المصادر).**

**n: هو عدد الاعمدة (المراكز).**

**ب- التحقق من أن الحل هو الأمثل :**

نستخدم طريقة التوزيع المعدل:

$U_1 + V_1 = 1 \rightarrow U_1 = 0 .\ V_1 = 1$

$U_1 + V_2 = 4 \rightarrow V_2 = 4 .$

$U_3 + V_2 = 8 \rightarrow U_3 = 4 .$

$U_3 + V_3 = 9 \rightarrow V_3 = 5 .$

$U_2 + V_3 = 3 \rightarrow U_2 = -2 .$

**في هذه المرحلة نتعامل مع الخلايا الداخلة في الحل و نفترض أن $U_1 = 0$**

| $\delta$ | $\delta_{IJ} = C_{ij} - U_i - V_j$ | $U_i . V_j$ |
|---|---|---|
| 0 | 5 - 0 - 5 | $U_1 . V_3$ |
| 6 | 5 +2 -1 | $U_2 . V_1$ |
| 5 | 7 + 2 - 4 | $U_2 . V_2$ |
| 5 | 10 - 4 -1 | $U_3 . V_1$ |

**في هذه المرحلة نتعامل مع الخلايا الخارجة من الحل**

يلاحظ أن جميع القيم الحدية موجبة إذن نقبل بهذا الحل على انه الأمثل و علية تكون التكلفة الاجمالية:

$$\text{Min } Z = (1*40)+(4*15)+(3*45)+(8*15)+(9*5) = \boxed{400}$$

**ملاحظة:** عند حساب القيم الحدية وجدنا القيمة 0 و هذه القيمة تدل على أنه يوجد حل اخر يعطي نفس التكلفة الاجمالية الادنى لهذا الحل.

و من الملاحظ أننا لو اردنا حل هذا المثال بطريقة الزاوية الشمالية الغربية يكون لدينا حل اساسي آخر، كما سنوضحه في الجدول التالي :

ايجاد الحل الاساسي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية

| | الوحدة الاولى | الوحدة الثانية | الوحدة الثالثة | العرض |
|---|---|---|---|---|
| الجلفة | 1 / 40 | 4 / 15 | 5 | 55 |
| بوسعادة | 5 | 7 / 15 | 3 / 30 | 45 |
| تيارت | 10 | 8 | 9 / 20 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

يلاحظ أن هذه الطريقة أعكتنا مسار مختلف عن الطريقة السابقة، و بما أن شرط عدد الحلول الممكنة محقق ننتقل للتحقق من أمثلية هذا الحل باستخدام طريقة التوزيع المعدل.

$U_1 + V_1 = 1 \rightarrow U_1 = 0 .\ V_1 = 1$

$U_1 + V_2 = 4 \rightarrow V_2 = 4 .$

$U_2 + V_2 = 7 \rightarrow U_2 = 3 .$

$U_2 + V_3 = 3 \rightarrow V_3 = 0 .$

$U_3 + V_3 = 9 \rightarrow U_3 = 9 .$

**في هذه المرحلة نتعامل مع الخلايا الداخلة في الحل و نفترض أن $U_1 = 0$**

| $\delta$ | $\delta_{IJ} = C_{ij} - U_i - V_j$ | $U_i . V_j$ |
|---|---|---|
| 5 | 5 - 0 - 0 | $U_1 . V_3$ |
| -1 | 5 -3 -1 | $U_2 . V_1$ |
| 0 | 10 - 9 - 1 | $U_3 . V_1$ |
| -5 | 8 - 9 -4 | $U_3 . V_2$ |

**في هذه المرحلة نتعامل مع الخلايا الخارجة من الحل**

يلاحظ وجود قيم حدية سالبة إذا هذا الحل لا يعتبر الأمثل و توجد خلية أحرى إذا أدخلناها في النموذج ستعمل على تخفيض التكاليف بمقدار 5 للوحدة للواحدة و هي الخلية U3.V2.

نعدل النموذج بإدخال الخلية $U_3.V_2$ و التي تحمل أكبر قيمة حدية سالبة (5-).

نقوم بالتعديل عبر مراحل :

أولا تحديد الزوايا السالبة للخلية التي سندخلها و هي $U_3.V_2$.

| | الوحدة الاولى | الوحدة الثانية | الوحدة الثالثة | العرض |
|---|---|---|---|---|
| الجلفة | (1) 40 | (4) 15 | (5) | 55 |
| بوسعادة | (5) | (7) 15 -∧ | (3) 30 +∧ | 45 |
| تيارت | (10) | (8) +∧ | (9) 20 -∧ | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

الخلايا السالبة هي التي تحمل رقم -1

ثانيا: نختار أقل قيمة من الخلايا السالبة و هي حسب مثالنا 15.

ثالثا: نضيف و نطرح 15 من الخلايا الأربع حسب اشارة +-1 .

| | الوحدة الاولى | الوحدة الثانية | الوحدة الثالثة | العرض |
|---|---|---|---|---|
| الجلفة | (1) 40 | (4) 15 | (5) | 55 |
| بوسعادة | (5) | (7) ~~15~~ 0 -∧ | (3) ~~30~~ 45 +∧ | 45 |
| تيارت | (10) | (8) 15 +∧ | (9) ~~20~~ 5 -∧ | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

و علية يكون جدول الحل الجديد :

| | الوحدة الاولى | الوحدة الثانية | الوحدة الثالثة | العرض |
|---|---|---|---|---|
| الجلفة | (1) 40 | (4) 15 | (5) | 55 |
| بوسعادة | (5) | (7) | (3) 45 | 45 |
| تيارت | (10) | (8) 15 | (9) 5 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

و يلاحظ أنه نفس الحل الأساسي المحصل عليه بطريقة التكلفة الدنيا و بنفس الطريقة السابقة نتحقق من أمثلية هذا الحل.