Série d'exercices N°2

Exercice 1. *Par la méthode de séparation des variables résoudre l'EDP suivante :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t > 0, \quad 0 < y < l, \\ u(0,x) = \dfrac{x(l-x)}{2l^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 & 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{1}$$

avec les condition aux limites suivantes :

1. $u(t,0) = 0,$ *et* $u(t,l) = 0,$
2. $u_x(t,0) = 0,$ *et* $u_x(t,l) = 0,$

pour tout $t \ge 0.$

Exercice 2. *Considérons l'équation de la poutre :*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,x) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 & 0 < x < l. \end{cases} \tag{2}$$

En utilisant séparation des variables. Résoudre ce problème dans les cas suivantes :

1. *poutre simplement supporté aux deux extrémités*

$$\begin{cases} u(t,0) = 0, & u(t,l) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,0) = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,l) = 0, \end{cases}$$

2. *poutre encastrée-simplement supportée*

$$\begin{cases} u(t,0) = 0, & u(t,l) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,l) = 0, \end{cases}$$

pour tout $t \ge 0.$

Exercice 3. 1. *On considère l'équation des ondes :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad t > 0, \quad 0 < y < l,$$

avec les conditions aux limites et initiale

$$\begin{cases} u(t,0) = 0, \qquad u(t,l) = 0, & t \ge 0, \\ u(0,x) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 & 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{3}$$

(a) *Montrer que la solution donne sous la forme*

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\frac{n\pi c}{l} t) \sin(\frac{n\pi}{l} x),$$

où $A_n, n = 1, 2, \ldots$ *sont des constantes arbitraires.*

(b) *Montrer que la limite de* $u(t,x)$ *quand* t *tend vers l'infinie n'existe pas.*

Bon courage

2. *On considère l'équation des ondes amorties*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad t > 0, \quad 0 < y < l,$$

où $0 < \alpha < \frac{2\pi c}{l}$.

   (a) *Avec les condition* (3), *montrer que la solitons est donne comme suite*

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4n\pi^2c^2}{l^2} - \alpha^2 t}) \sin(\frac{n\pi}{l}x),$$

   où $B_n, n = 1, 2, \ldots$ *sont des constantes arbitraires.*

   (b) *Calculer* $\lim_{t\to\infty} u(t,x)$. *Que peut-on dire du terme d'amortissement* $\alpha\dfrac{\partial u}{\partial t}$ *?*

3. *Application :* $f(x) = sin(\frac{m\pi}{l}x), \quad m \in \mathbb{N}^*$.