حلول السلسلة رقم 04: القيم الذاتية والأشعة الذاتية

تذكير : إذاكانت A مصفوفة وكان $\lambda \in \Re$ ، نقول أن λ هي قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وجد $X \in \Re^n$ و $X \neq 0$ حيث: $AX = \lambda X$ و في هذه الحالة يسمى X شعاع ذاتي بالنسبة للقيمة الذاتية λ.

1.إذاكانت A مصفوفة وكان $\lambda \in \Re$ ، فإن λ قيمة ذاتية للمصفوفة A إلا وإذا كان $|A-\lambda I| = 0$.

2.إذاكانت A مصفوفة فإن $|A-\lambda I| = 0$ **يسمى كثير الحدود المميز للمصفوفة A.**

التمرين الأول.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1.كثير الحدود المميز للمصفوفة.

$$|A-\lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

كثير الحدود المميز

ومنه فإن القيم الذاتية هي : $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-4)(\lambda+1) = 0$

أي أن : $\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = -1$

2.الأشعة الذاتية.

بالنسبة للقيمة الذاتية الأولى. $(A-\lambda_1 I)X = 0$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

ومنه:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بالنسبة للقيمة الذاتية الأولى. $(A-\lambda_2 I)X=0$

$$\left\langle\begin{array}{cc|c}2&3&0\\2&3&0\end{array}\right\rangle\sim\left\langle\begin{array}{cc|c}2&3&0\\0&0&0\end{array}\right\rangle$$

ومنه:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}x_2\\x_2\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$$

يمكن تلخيص كل ما سبق كما يلي: (كل قيمة ذاتية يقابلها شعاع ذاتي).

$$\lambda_1=4\mapsto X_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\qquad \lambda_2=-1\mapsto X_2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&0\\1&-1&3\end{pmatrix}$$

1.كثير الحدود المميز للمصفوفة.

$$|F-\lambda I|=\left|\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&0\\1&-1&3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\-1&2-\lambda&0\\1&-1&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\-1&2-\lambda&0\\1&-1&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&0\\1&3-\lambda\end{vmatrix}+1*\begin{vmatrix}-1&2-\lambda\\1&-1\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-0]+[(-1)*(-1)-1*(2-\lambda)]$$

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)+1-(2-\lambda)=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-1+\lambda$$

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-(1-\lambda)=(1-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-1]$$

$$=(1-\lambda)(6-5\lambda+\lambda^2-1)=(1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+5)$$

$$=(1-\lambda)(\lambda+\frac{\sqrt{5}-5}{2})(\lambda-\frac{\sqrt{5}+5}{2})$$

أي ان القيم الذاتية هي:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{-\sqrt{5}+5}{2} \qquad \lambda_3 = \frac{\sqrt{5}+5}{2}$$

2.الأشعة الذاتية.

$$\lambda_1 = 1$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right\rangle$$

ومنه الشعاع الذاتي هو:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \mapsto X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\sqrt{5}+5}{2}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} \frac{\sqrt{5}-3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-\sqrt{5}-3}{2} & 0 \\ -1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-\sqrt{5}-3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{-\sqrt{5}-3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{5}+2 & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-\sqrt{5}-3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{5}-2 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{5}+2 & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-\sqrt{5}-3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{5}-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

أي أن:

$$\begin{cases} x_1-\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}x_3=0 \\ x_2-(\sqrt{5}+2)x_3=0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x_1=\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}x_3 \\ x_2=(\sqrt{5}+2)x_3 \end{cases} \mapsto X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5}+3}{2}x_3 \\ (\sqrt{5}+2)x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5}+3}{2} \\ (\sqrt{5}+2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=\frac{\sqrt{5}+5}{2}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} \dfrac{-\sqrt{5}-3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \dfrac{-\sqrt{5}+1}{2} & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \dfrac{\sqrt{5}-3}{2} & 0 \\ -1 & \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \dfrac{-\sqrt{5}+1}{2} & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \dfrac{\sqrt{5}-3}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} & \dfrac{\sqrt{5}-3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{5}+2 & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \dfrac{\sqrt{5}-3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{5}-2 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{5}+2 & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \dfrac{\sqrt{5}-3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{5}-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

أي أن:

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}x_3=0 \\ x_2+(\sqrt{5}-2)x_3=0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x_1=-\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}x_3 \\ x_2=-(\sqrt{5}-2)x_3=(-\sqrt{5}+2)x_3 \end{cases}$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}x_3 \\ (-\sqrt{5}+2)x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{5}-3}{2} \\ (-\sqrt{5}+2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

1.كثير الحدود المميز للمصفوفة.

$$|E-\lambda I|=0\Leftrightarrow\left|\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\0&1-\lambda&0\\-1&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)+1\right]=-\lambda^3+4\lambda^2-6\lambda+3$$

$$=(1-\lambda)\times\left(\lambda^2-3\lambda+3\right)=0$$

ليس هناك حلول في $\Re$ لذا نستعمل الأعداد المركبة باستخدام العدد التخيلي i ومنه:

$$|E-\lambda I|=0\Leftrightarrow(1-\lambda)\times\left(\lambda+\frac{\mathrm{i}\times\sqrt{3}-3}{2}\right)\times\left(\lambda-\frac{\mathrm{i}\times\sqrt{3}+3}{2}\right)=0$$

أي أن القيم الذاتي هي:

$$\lambda_1=1\qquad\lambda_2=\frac{-\mathrm{i}\sqrt{3}+3}{2}\qquad\lambda_3=\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}+3}{2}$$

2.الأشعة الذاتية. نترك الطالب عملية البحث عن الأشعة الذاتية.

التمرين الثاني.

$$(S)\begin{cases}x_1+x_2-x_3=3\\ \quad x_2+x_3=-1\\ \quad x_2+2x_3=4\end{cases}$$

1.حل الجملة بطريقة غوص.

الشكل المصفوفي للجملة هو:

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&3\\0&1&1&-1\\0&1&2&4\end{array}\right\rangle\sim\left\langle\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&3\\0&1&1&-1\\0&0&1&5\end{array}\right\rangle$$

أي أن حلول الجملة تكتب على الشكل:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 14 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

2.إيجاد القيم الذاتية والأشعة الذاتية.

2.1 كثر الحدود المميز.

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-1\right] = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda + \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)\left(\lambda - \frac{\sqrt{5}+3}{2}\right) = 0$$

أي أن القيم الذاتية هي:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{-\sqrt{5}+3}{2} \qquad \lambda_3 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

2.2 الأشعة الذاتية.

$$\lambda_1 = 1$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

وبالتالي يكون الشعاع الذاتي الأول عبارة عن حلول جملة المعادلات كما يلي:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=\frac{-\sqrt{5}+3}{2}$$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 & -1 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0\end{array}\right\rangle\sim\left\langle\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & 0\\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0\\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0\end{array}\right\rangle\sim\left\langle\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & 0\\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right\rangle$$

$$\sim\left\langle\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -\sqrt{5}-2 & 0\\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right\rangle$$

أي ان:

$$\begin{cases}x_1-(\sqrt{5}+2)x_3=0\\ x_2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=(\sqrt{5}+2)x_3\\ x_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}x_3\end{cases}$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\sqrt{5}+2)x_3\\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2}x_3\\ x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}\sqrt{5}+2\\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\sim \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \sqrt{5}-2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

أي أن:

$$\begin{cases} x_1 + (\sqrt{5}-2)x_3 = 0 \\ x_2 - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = (-\sqrt{5}+2)x_3 \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} x_3 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\sqrt{5}+2)x_3 \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\sqrt{5}+2 \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$