

# Partie A

# Supraconductivité

## *Chapitre 4*

## *Maillons faibles et Effets de Josephson*

# Ce chapitre contient:

- I. Introduction
- II. Maillons faibles, paires effets tunnel, et Josephson
  - II.1. Effet tunnel
  - II.2 Paires effets tunnel, et Josephson
- III. Effet Josephson alternatif (AC)
- IV. Courant de Josephson dans un champ magnétique

# I. Introduction

Dans les supraconducteurs la résistance zero et l'effet Meissner sont considérés comme propriétés macroscopique des supraconducteurs.

Dans ce chapitre nous étudions les propriétés qui peuvent être expliquées par les concepts de la mécanique quantique (propriétés microscopique).

- Un exemple de propriétés microscopiques est le phénomène d'effet tunnel des électrons dans les supraconducteurs.

On définit Maillon faible comme plusieurs supraconducteurs couplés par une liaison faible.

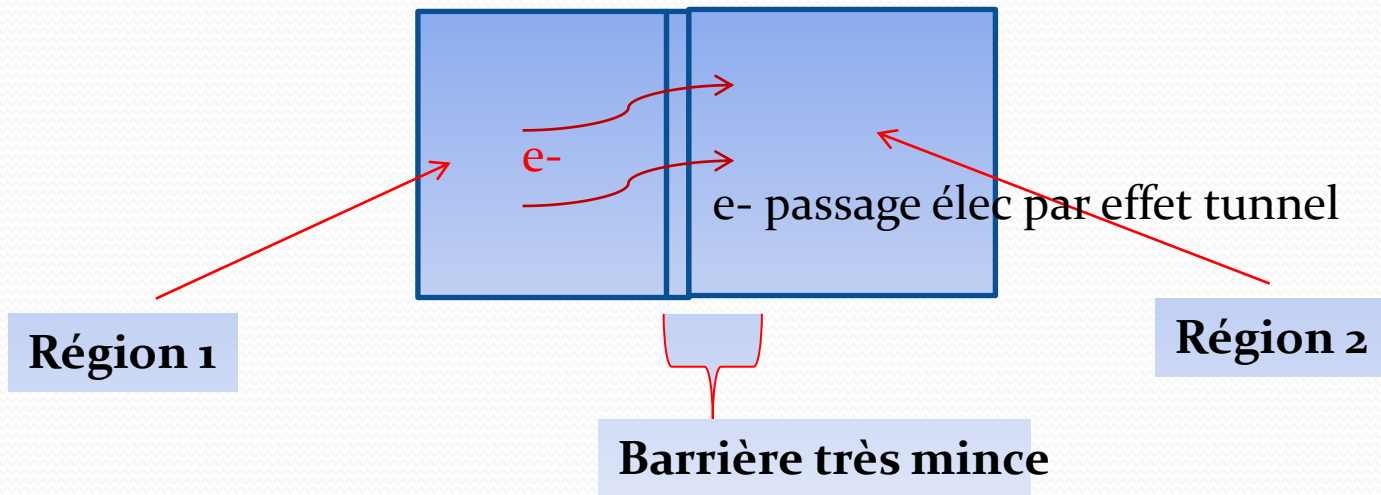
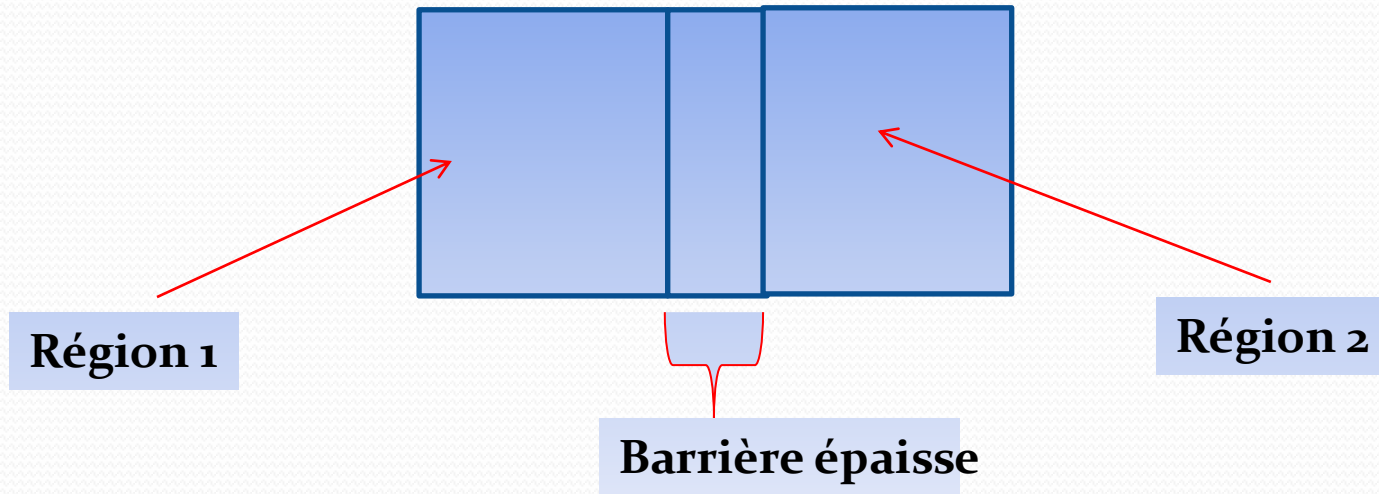
**Le maillon faible** peut être constitué par une barrière isolante mince (appelée jonction supraconducteur-isolant-supraconducteur, ou SIS), une courte section de métal non supraconducteur (SNS) ou un étranglement physique qui affaiblit la supraconductivité au point de contact (sss).

## II. Paires effets tunnel, et Josephson

### II.1. Effet tunnel

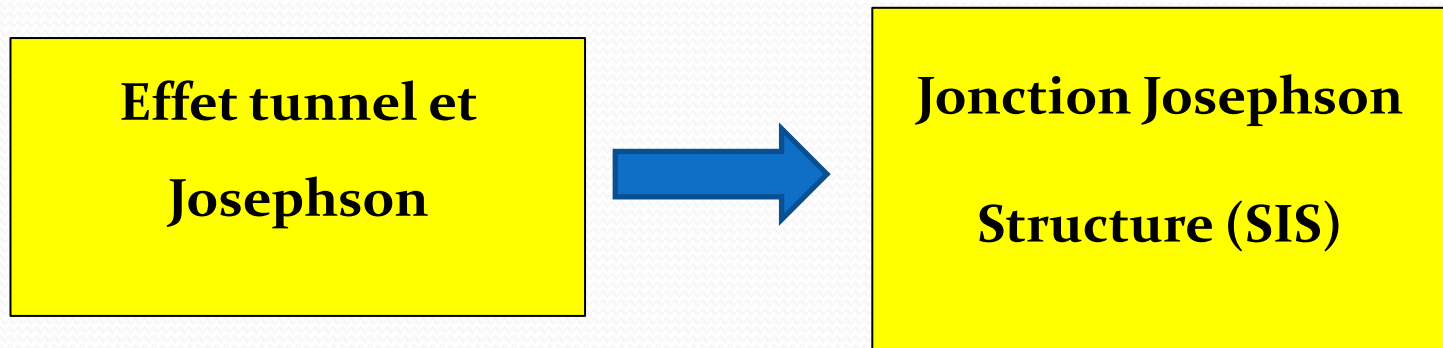
- L'effet tunnel est un processus qui découle de la nature ondulatoire de l'électron. Il se produit en raison du transport des électrons à travers des espaces qui sont interdits par la physique classique en raison d'une barrière de potentiel.
- Si l'épaisseur de la barrière est grande l'électron ne peut pas traverser la barrière et si l'épaisseur est très mince, un électron peut probablement traverser la barrière est c'est **l'effet tunnel** (voir figure

# Effet tunnel



## II.2 Paires effets tunnel, et Josephson

- Le tunnelage (passage par effet tunnel) d'une paire d'électrons entre des supraconducteurs séparés par une barrière isolante a été découvert pour la première fois par **Brian Josephson** en 1962.
- Josephson a découvert que si deux matériaux supraconducteurs étaient séparés par une mince barrière isolante telle qu'une couche d'oxyde de **10 à 20 angströms** d'épaisseur, il est possible que des paires d'électrons traversent la barrière sans résistance à travers un tunnel.
- **Le flux de courant électrique** entre deux matériaux supraconducteur séparés par une fine couche de matériau isolant est connu sous le nom **d'effet Josephson** à courant continu.



Donc:

Une jonction Josephson est constituée de deux supraconducteurs séparés par une mince barrière isolante on aura une structure suprisolant-supra [SIS]

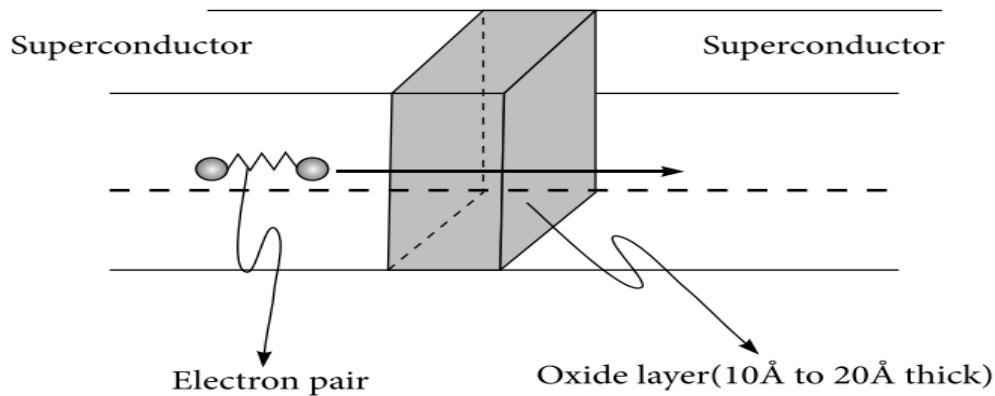
**Le courant qui circule dans une jonction Josephson en courant continu (DC) a une densité de courant critique qui est caractéristique du matériau et de la géométrie de la jonction.**

# que se passe t'il?

- Des paires (paires de Cooper) d'électrons supraconducteurs creuseront un tunnel à travers la barrière.
- Tant que le courant est inférieur au courant critique pour la jonction, il n'y aura aucune résistance et aucune chute de tension aux bornes de la jonction
- en dessous d'un courant critique  $I_c$ , la tension aux bornes de la jonction est nulle
- Paire effet tunnel et Josephson est déduite du couplage de passage d'une paire d'électron (paires de Cooper) et la jonction Josephson
- La figure 2-a illustre l'effet Josephson et la figure 2-b est un graphique de la relation courant-tension pour une jonction Josephson



## II.2 Paires effets tunnel, et Josephsons



Applications: La jonction Josephson peut se comporter comme un dispositif de commutation super rapide. Les jonctions Josephson peuvent remplir des fonctions de commutation telles que la commutation de tensions environ dix fois plus rapide que les circuits semi-conducteurs ordinaires.

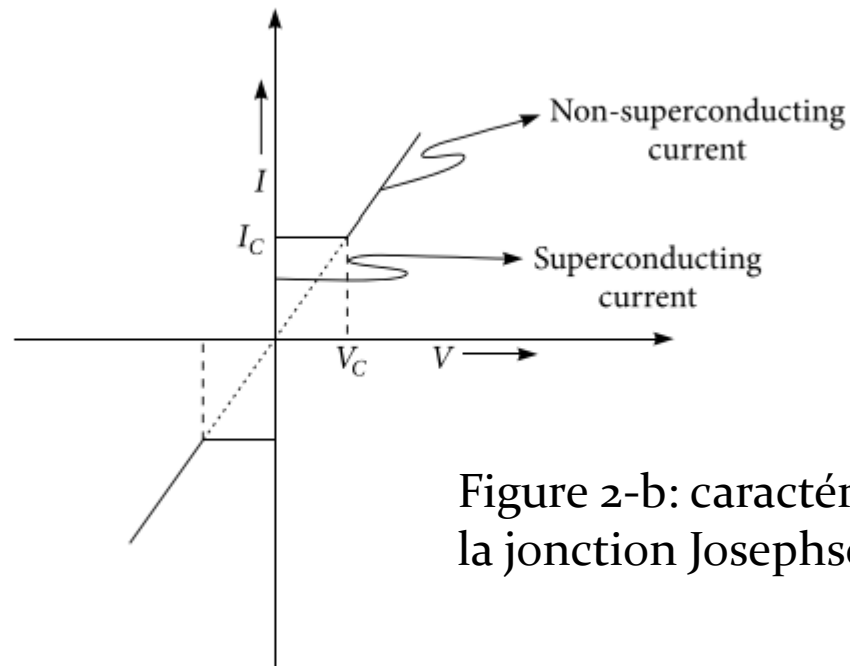


Figure 2-b: caractéristiques  $I(V)$  de la jonction Josephson

# Théorie

- On a deux choses: **effet Josephson** et le **supercourant** résultant de l'effet tunnel des paires est appelé le super courant Josephson.

À la suite des travaux originaux de Josephson (1962, 1964, 1965, 1969), nous résumons un formalisme Hamiltonien de l'effet tunnel et donner l'expression pour la dépendance en température du supercourant de Josephson. ( pour plus de détails voir réf : Ketterson, J. B., & Song, S. N. (n.d.). Pair tunneling: the microscopic theory of the Josephson effects. Superconductivity, 222–229. Annex A

# Théorie

- La jonction est généralement décrite par l'Hamiltonien suivant (Cohen, Falicov et Phillips 1962, Wolf 1985)

$$\hat{H} = \hat{H}_L + \hat{H}_R + \hat{H}_T = \hat{H}_0 + \hat{H}_T.$$

Où  $H_L$  et  $H_R$  sont les Hamiltoniens complets des supraconducteurs de gauche et de droite, respectivement, qui commutent avec les opérateurs de nombre de particules  $N_L$  et  $N_R$ ,  $H_T$  l'Hamiltonien de couplage

Le courant tunnel  $I(V, T)$  pour  $T > 0$  et  $V \neq 0$  est obtenu à partir de la valeur d'espérance de la variation du taux de l'opérateur du nombre  $\widehat{N}_R$  d'électrons donné par:

$$I(V, T) = -e \langle \dot{\widehat{N}}_R \rangle$$

Où  $\dot{\widehat{N}}_R$  est la dérivée temporelle de  $\widehat{N}_R$  et le courant est supposé circuler de gauche à droite.

# Théorie

Après une série de calculs et de développement de formules (voir référence indiquée au diapo 9, la dépendance en température du supercourant de Josephson  $I_J$  est donnée par (Ambegaokar et Baratoff 1963)

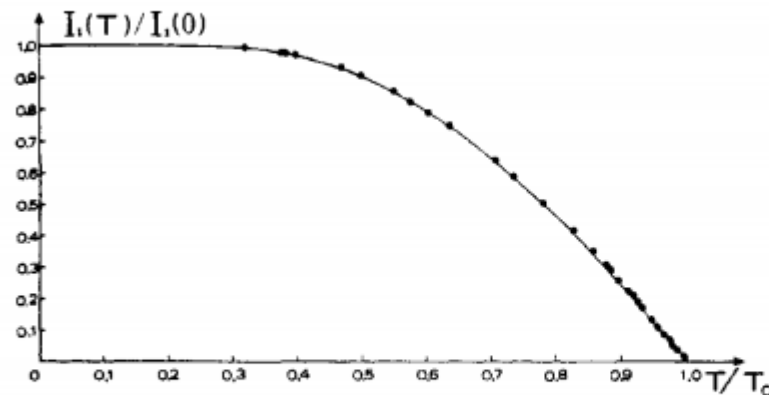
$$I_J(T) = \frac{\pi \Delta(T)}{2eR_N} \tanh \left( \frac{\Delta(T)}{2k_B T} \right) \quad (1)$$

où  $R_N$  est la résistance de jonction à l'état normal

La figure 3, montre un exemple de l'allure de la dépendance de la température du supercourant

A  $T=0$ , on aura le maximum du courant car l'équa I sera de forme:

$$I_J(0) = \frac{\pi \Delta}{2eR_N}$$



**Figure 3** Temperature dependence of the maximum dc Josephson current for an Sn/SnO<sub>x</sub>/Sn junction. The experimental data (solid circles) are compared with the theoretical curve (solid line) calculated using Eq. 1 (After Balsamo *et al.* (1974).)

# Théorie

$$I_J(0) = \frac{\pi\Delta}{2eR_N}$$

- Cette expression est très utile dans la pratique. Elle permet d'estimer facilement le supercourant de Josephson maximum attendu en examinant simplement la courbe I-V de la jonction.

- Si le courant tunnel de quasi-particulaire  $I_N = \frac{2\Delta}{e}$  le supercourant Josephson maximum théoriquement prédit est

$$\frac{I_J}{I_N} = \frac{\pi}{4}$$

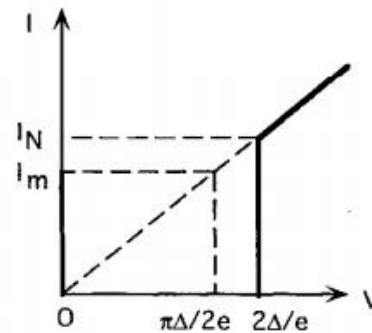


Figure 4 Schematic showing the ratio between the maximum Josephson current and the quasiparticle current at the sum-gap voltage;  $I_m = I_J(0)$ .

# III. Effet Josephson alternatif

- Si une jonction Josephson n'est pas polarisée, on a montré qu'un courant continu est généré c'est le supercourant Josephson
- Dans ce paragraphe, nous essayons de voir l'effet de la polarisation (parcourir la jonction par un courant continu).
- Si la jonction est polarisée de gauche à droite, on aura une augmentation de la concentration des électrons ( $n$ ) et si  $n$  augmente, les paires de Cooper passent de droite à gauche, transportant chacune une charge  $-2e$ . C'est l'équivalent d'un courant circulant à droite de charge  $+2e$ .
- Pour trouver ce courant, on calcule donc le taux de changement du nombre de paires de Cooper à gauche en utilisant les équations du mouvement de Heisenberg

$$\frac{d\hat{N}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_J, \hat{N}] \quad (1)$$

$$= -\frac{E_J}{2} \frac{i}{\hbar} [e^{i\hat{\theta}} + e^{-i\hat{\theta}}, \hat{N}] \quad (2)$$

$$= -\frac{E_J}{2} \frac{i}{\hbar} (-e^{i\hat{\theta}} + e^{-i\hat{\theta}}) \quad (3)$$

$$= -\frac{E_J}{\hbar} \sin \hat{\theta}. \quad (4)$$

Avec

$H_J$  : Hamiltonien qui décrit l'interaction entre les deux supraconducteurs

$E_J$  : énergie de jonction Josephson

### III. Effet Josephson alternatif

Si le nombre de paires de Cooper augmente à gauche, une charge  $-2e$  passe à gauche à chaque fois, ce qui est comme une charge  $+2e$  vers la droite. Le courant circulant vers la droite est donc donné par:

$$\hat{I} = 2e \frac{d\hat{N}}{dt} = -\frac{2e}{\hbar} E_J \sin \hat{\theta}. \quad (5)$$

En présence d'un courant, il y a une différence de phase entre les deux supraconducteurs.

Quel est l'effet d'une différence de potentiel?

Une différence de potentiel  $V$  entre le côté droit et le côté gauche se retrouvera dans l'Hamiltonien sous la forme

$$-2eV_D \left( \frac{N_T}{2} - \hat{N} \right) - 2eV_G \left( \frac{N_T}{2} + \hat{N} \right) = 2e(V_D - V_G) \hat{N} + cte = 2eV \hat{N}.$$

$N_T$  est le nombre total des paires de Cooper,  $V_G$  et  $V_D$  sont les potentiels de gauche et de droite. Ce terme induira une dépendance temporelle de la phase

### III. Effet Josephson alternatif

Ce déphasage se traduit par :

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{H}_J + 2eV \hat{N}, \hat{\theta} \right] \quad (6)$$

$$= 2e \frac{i}{\hbar} V \left[ \hat{N}, \hat{\theta} \right] \quad (7)$$

$$= \frac{2e}{\hbar} V. \quad (8)$$

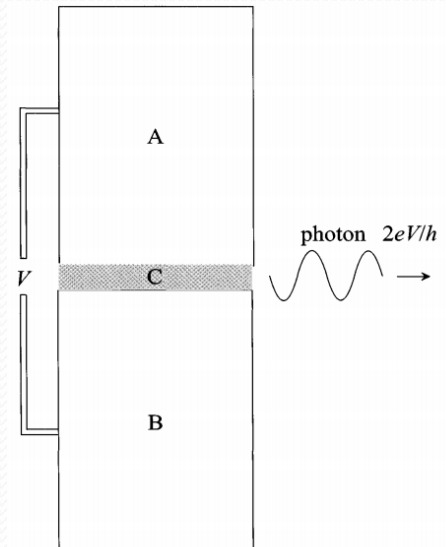
On constate que la différence de potentiel constante produira une phase augmentant linéairement dans le temps, ce qui se traduira par un courant oscillant.

#### Conclusion

On peut conclure que l'application d'une tension continue de part et d'autre de la jonction provoque des oscillations de courant donc **génération d'un courant alternatif** (c'est l'effet Josephson avec une pulsation :

Rque: les deux supraconducteurs sont identiques

$$\omega_j = \frac{2eV}{\hbar}$$



*Un résultat remarquable qui a valu le prix Nobel à Josephson et qui est utilisé couramment aujourd'hui en métrologie pour étalonner le volt. En effet, la fréquence est une quantité qui peut être mesurée avec une très grande précision.*



## IV. Effet d'un champ magnétique

### Hypothèses

- Jusqu'à présent nous avons supposé qu'aucun champ magnétique n'était appliqué.
- On note que les courants circulant dans la jonction ne produisaient qu'une quantité négligeable de flux magnétique.
- La présence d'un champ magnétique avec l'effet Josephson (courant Josephson; courant oscillateur) présente la particularité de modulation

Une transformation de jauge modifie le potentiel vecteur  $\vec{A}$  et le potentiel scalaire  $U$  selon :

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\chi \quad (9)$$

$$U \rightarrow -\frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (10)$$

Les quantités physiques observables doivent demeurer inchangées, ce qui implique la transformation suivante pour la phase

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{2e}{\hbar}\chi \quad (11)$$

Calculons la variation de la différence de phase  $\Delta\gamma$  d'une part entre les points  $G_A$  et  $D_A$  et d'autre part entre les points  $G_B$  et  $D_B$

La différence de phase invariante de jauge  $\gamma$  le long d'un chemin  $\ell$  est alors donnée par

$$\gamma \equiv \phi - \frac{2e}{\hbar} \int_{\ell} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (12)$$

En l'absence de champ magnétique la phase invariante de jauge  $\gamma$  se confond avec la phase  $\phi$ .

La figure 6 montre un schéma de structure d'une jonction Josephson;  
 $\lambda_G$   $\lambda_R$  Les longueurs de pénétration du champ

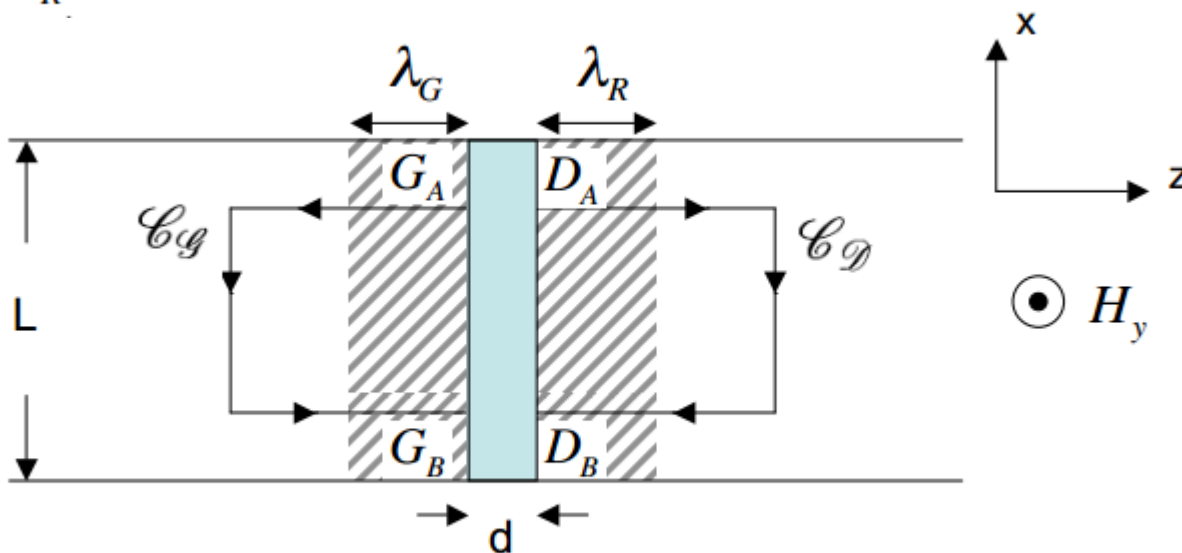


FIG. 6 Définition des contours d'intégration  $\mathcal{C}_g$  et  $\mathcal{C}_d$  utilisés dans le calcul de  $\delta\gamma$ .

Calculons la variation de la différence de phase  $\Delta\gamma$  d'une part entre les points  $G_A$  et  $D_A$  et d'autre part entre les points  $G_B$  et  $D_B$ , figure 6

#### IV. Effet d'un champ magnétique

$$\begin{aligned}\Delta\gamma &= [\gamma(D_A) - \gamma(G_A)] - [\gamma(G_B) - \gamma(D_B)] \\ &= [\phi(G_B) - \phi(G_A)] - [\phi(D_B) - \phi(D_A)] - \frac{2e}{\hbar} \int_{G_A D_A} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \frac{2e}{\hbar} \int_{G_B D_B} \vec{A} \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

En plus du déphasage dû au champ magnétique il faut également tenir compte du déphasage induit par la circulation du courant d'écrantage. Celui-ci est donné par la circulation du vecteur d'onde  $\vec{k}$  le long du chemin suivi par le courant

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \quad (13)$$

où  $\vec{p} = 2m_e \vec{v}$  est l'impulsion d'une paire de Cooper directement reliée à la densité  $\vec{J}_S$  de supercourant par la relation

$$\vec{J}_S = -n_S e \vec{v} \quad (14)$$

où  $n_S$  est la densité d'électrons supraconducteurs.

Le déphasage induit par la circulation du courant le long d'un chemin C est donc donné par:

$$\frac{m}{n_S e \hbar} \int_C \vec{J}_S \cdot d\vec{l} \quad (15)$$

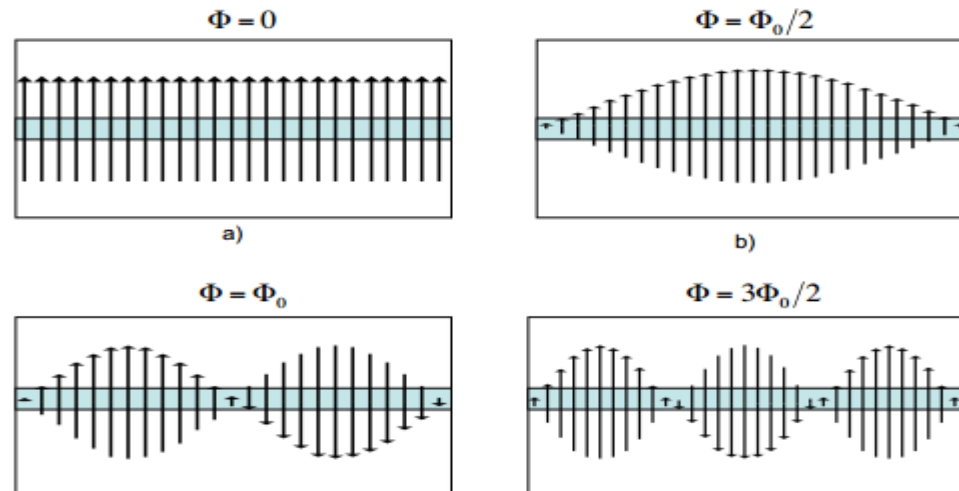
#### IV. Effet d'un champ magnétique

Après une série de calculs (peut être donnée sous forme d'un exercice de TD), la variation de la différence de phase est :

$$\Delta\gamma = \frac{2e}{\hbar}(\lambda_G + \lambda_D + d)H_y\Delta x$$

où  $H_y$  est la composante du champ magnétique selon  $y$ ,  $\lambda_G$  et  $\lambda_D$  les longueurs de pénétration respectives dans les supraconducteurs de gauche  $G$  et de droite  $D$

La distribution du courant dans une jonction en fonction du champ magnétique appliqué est représentée dans la figure ci-dessous.



quantum de flux magnétique  $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ .

En fin la densité de courant Josephson sous un champ magnétique externe perpendiculaire à la direction  $y$  s'écrit sous

$$J(x) = J_1(x, y) \sin\left(\frac{2\pi l}{\Phi_0} H_y x + \gamma_0\right)$$

Pour le cas d'une jonction rectangulaire, ayant une densité uniforme (figure 8), le courant  $I(k)$  est donné par

$$I(k) = I_1 \left| \frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{\frac{kL}{2}} \right| \quad (17)$$

où  $I_1 = J_1 LW$ .

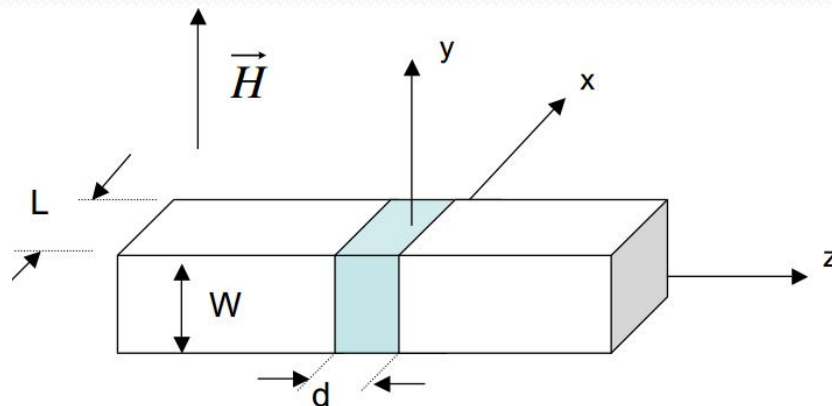


FIG. 8 – Représentation schématique d'une jonction Josephson parallèle au plan  $(x, y)$  placée dans un champ magnétique orienté selon l'axe  $y$ .

#### IV. Effet d'un champ magnétique

En notant  $\Phi = H_y L l$  flux du champ magnétique dans la jonction et en remplaçant  $k$  par son expression on obtient:

$$k = \frac{2\pi l}{\gamma_0} H_y$$

$$I_1(\Phi) = I_1 \left| \frac{\sin\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}{\frac{\Phi}{\Phi_0}} \right| \quad (18)$$

Le tracé de la relation 18 induit le phénomène de modulation du courant critique en fonction du flux magnétique

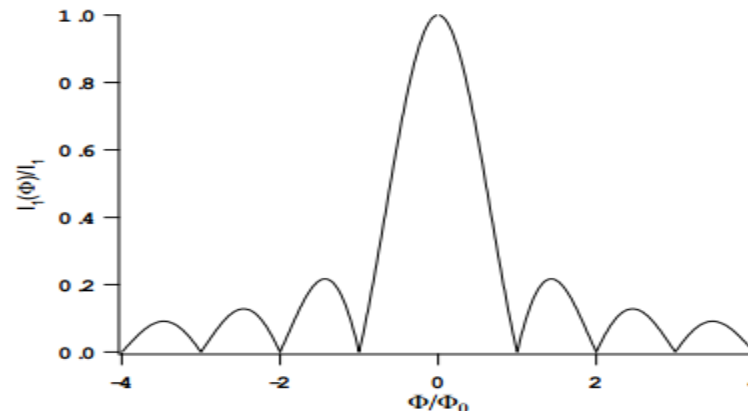


FIG. 9 – Modulation du courant critique en fonction du flux dans la jonction dans le cas d'une jonction étroite de forme rectangulaire (figure de diffraction de Fraunhofer).



Fin du chapitre