Extremum

1. Extrema libres

Définition (Extrema des fonctions de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$)

Soit une fonction $f\ de\ D \subset \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.

1. On dit que f admet **un minimum local** (respectivement **maximum local**) en $\boldsymbol{a}$ s'il existe un Voisinage V de $\boldsymbol{a}$, contenu dans D, tel que $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$) pour tout $x \in V$

2. On dit que f présente **un minimum global** (respectivement **maximum global)** en $\boldsymbol{a}$ si que $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$) pour tout $x \in D$.

3. Un extremum est un minimum ou un maximum. (Au pluriel, on parle d'extrema, de minima, ou demaxima).

Définition : (POINT CRITIQUE)

On dit que le point $\boldsymbol{a} \in D$ est **un point critique** ou **stationnaire** de la fonction f ssi $\nabla f(a) = 0$

Théorème : *condition nécessaire d'extrémum*

On suppose que les dérivées partielles de f existent en un point $\boldsymbol{a}$ n'appartement pas au bord de D.

Une condition nécessaire pour que la fonction f admette un extremum en $\boldsymbol{a}$ est que $\nabla f(a) = 0$.

Exemple

la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ dans le disque ouvert centré en (0,0) de rayon 1, représenté par $\mathfrak{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x^2 + y^2 < 1\}$. l'unique point critique est (0,0) qu'on trouve en résolvant $\partial_x f(x, y) = 0$ et $\partial_y f(x, y) = 0$.

La définition implique de façon immédiate que f admet un minimum global en (0, 0). En effet

$f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0) \qquad \forall (x, y) \in \mathfrak{D}$.

En revanche, la fonction n'admet aucun maximum.

Définition : Un point critique de f qui n'est pas un extremum est appelé point-selle ou col.

- Si $\boldsymbol{a} = (x_0, y_0)$ est un point critique d'une fonction $f(x, y)$ alors $\partial_x f(x_0, y_0) = \partial_y f(x_0, y_0) = 0$ d'où le vecteur normal au plan tangent au graphe de f en $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ est (0, 0,−1), donc c'est un plan horizontal parallèle à x0y.

Théorème :

Si D est un domaine fermé et borné, et si f est continue sur D, alors f admet un minimum et un maximum globaux sur D.

Théorème :

les extrema d'une fonction C^1 sur un domaine fermé et borné sont soit des points critique, soit des points du bord de D.

Théorème *Condition suffisante d'extrémum local dans un ouvert (cas de 2 variables)*

Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point stationnaire ; posons $\Delta\, H_f(x, y) = \partial_{xx} f(x, y). \partial_{yy} f(x, y) - \partial_{xy} f(x, y). \partial_{yx} f(x, y)$.

- Si $\Delta\, H_f(x_0, y_0) > 0$ et $\partial_{xx} f(x_0, y_0) < 0$: f admet un maximum local strict en (x_0, y_0) .
- Si $\Delta\, H_f(x_0, y_0) > 0$ et $\partial_{xx} f(x_0, y_0) > 0$: f admet un minimum local strict en (x_0, y_0) .
- Si $\Delta\, H_f(x_0, y_0) < 0$, alors f a un point-selle (ou point-col) en (x_0, y_0); ce n'est pas un extrémum;
- Si $\Delta\, H_f(x_0, y_0) = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes.il faut étudier localement le comportement de f au voisinage de (x_0, y_0).

Étude directe

Après avoir déterminé un point stationnaire $\boldsymbol{a}$, on peut aussi étudier directement le signe de la différence

$d(\boldsymbol{h}) = f(a + h) - f(a)$.

Si cette différence est de signe constant pour $\boldsymbol{h}$ voisin de **0**, il s'agit d'un extrémum local (un maximum si

$d < 0$, un minimum si $d > 0$). Sinon, il s'agit d'un point-col (ou point-selle).Mieux, si le signe est constant pour$\boldsymbol{h}$ quelconque, alors l'extrémum est global.

Exemple

On veut étudier la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle a pour dérivées partielles $\partial_x f\left(x, y_y\right) = 2x - 2$ et $\partial_y f(x, y) = 2y - 2$ ne s'annulent qu'en (1,2), seul point où il peut donc y avoir un extremum local. On étudie directement le signe de la différence $d(h, k) =$
$f(1 + h, 2 + k) - f(1,2) = h^2 + k^2 > 0$

Comme cette différence est positive pour h et k voisins de 0 il s'agit d'un minimum.

En effet, $\partial_{xx} f(1,2) = 2 > 0,\ \partial_{yy} f(1,2) = 2,\ \partial_{xy} f(1,2) = 0$ et il s'agit bien d'unminimum.

Exemple

la fonction $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$, f est un polynôme, donc elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

Recherche des points critiques On a :

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 3y^2 - 2x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow (x, y) = (-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}) \text{ ou } (x, y) = (1,1)$$

Donc les points critique sont $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ et $(1,1)$

La matrice Hessienne de f en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x,y) & \partial_{xy}f(x,y) \\ \partial_{xy}f(x,y) & \partial_{yy}f(x,y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}$$

Comme $\Delta H_f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) < 0$ et $\Delta H_f(1,1) > 0$, alors $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ est un point-selle et f admet un minimum local strict en $(1,1)$ de valeur $f(1,1) = -1$. Ce minimum n'est cependant pas global puisque, par exemple, $f(0,-2) = -6 < f(1,1) = -1$

➢ 2. Extrema liés

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la recherche des extrema sous certaines contraintes. Il paraît normal donc de définir ce que sont des contraintes.

Problème

Déterminer les extrema d'une fonction de n variables, notée $f(x)$, mathématiquement définie dans un domaine ouvert $D \subset \mathbb{R}^p$, mais dont les variables sont soumises aux k contraintes $g_1(x) = 0, g_2(x) = 0 \ \dots, g_k(x) = 0$, où les fonctions g_j sont également définies dans D. Ces contraintes délimitent le sous-ensemble $\mathcal{A}$ de D dans lequel s'effectue l'optimisation

$\mathcal{A} = \{x \in D \setminus g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0\}$.

Définition 1 :

Si f et $g_1, \dots, g_k$ sont des fonctions définies sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,
un point $a \in D$ tel que $g_1(a) = 0, \dots, g_k(a) = 0$ est un minimum local de f sous les contraintes $g_1, \dots, g_k$ s'il existe un voisinage V_a de a tel que

$$f(x) \geq f(a)$$

pour tout $x \in V_a$ et $g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0$. (i.e $x \in \mathcal{A}$).

Définition 2 : extremum *liée*

La fonction f admet un maximum (local ou global) lié (resp. un minimum (local ou global) lié) sous les *contraintes* $g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0\ , \dots, g_k(x) = 0$ en $a \in \mathcal{A}$ si, en ce point, elle admet un maximum (local ou global) libre (resp. un minimum (local ou global) libre) dans le domaine $\mathcal{A}$.

Théorème de LAGRANGE (Extrema liés avec une seule contrainte)

Soient $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, soit $(a,b) \in D$ tels que

1. f admet en point (a,b) un extremum lié sous la contrainte $g(x,y) = 0$,
2. $\nabla g(a,b) \neq 0$,

alors il existe un nombre réel $\lambda \neq 0$ tel que $\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b)$

Autrement dit, les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$ figurent parmi les points (a, b) solution du système:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = 0 \\ \quad\quad g(a,b) \quad\quad = \quad 0 \end{cases}$$

N.B. : Le réel $\boldsymbol{\lambda}$ est appelé multiplicateur de Lagrange

Théorème *de* LAGRANGE (Extrema liés avec plusieurs contraintes)

Soit les fonctions f et $g_1, \dots, g_k$ $(k < p)$ de classe C^1 dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^p$. Si f admet en $\boldsymbol{a}$ un extremum lié sous les contraintes $g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0$ et si la Jacobienne de g en $\boldsymbol{a}$ est de rang $\boldsymbol{k}$, alors

$$\exists\, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \text{ tel que } \nabla f(a) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(a).$$

Le théorème de LAGRANGE peut être vu comme **la condition nécessaire d'existence d'extrema** libres appliquée à la fonction de $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{k}$ variables appelée fonction lagrangienne (ou le lagrangien) :

$$\begin{aligned} L : D \subset \mathbb{R}^k &\to \mathbb{R} \\ (a, \lambda) &\longmapsto f(a) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(a) \end{aligned}$$

Où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

Théorème (convexité et minimum)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^p$ et soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble convexe de D.

1. Si $f_{/\mathcal{C}}$ est convexe et admet un minimum local dans $\mathcal{C}$, c'est un minimum global.

2. Si $f_{/\mathcal{C}}$ est strictement convexe alors elle admet au plus un minimum, et c'est un minimum strict.

3. Si f est différentiable, une condition nécessaire pour qu'un point $\boldsymbol{a} \in \mathcal{C}$ soit un minimum de $f_{/\mathcal{C}}$ est $df_q(x - a)$

pour tout $x \in \mathcal{C}$. Si de plus $f_{/\mathcal{C}}$ est convexe, cette condition est également suffisante.