وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة زيـان عاشور الجلفـة
كليـة العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسـم العلوم المالية والمحاسبية

مطبوعة خاصة بالتدريس عن بعد:

مقرر: الرياضيات المالية

مقدمة لطلبة السنة ثانية جذع مشترك في العلوم المالية والمحاسبة

من إعـداد:

الدكتور. حديدي آدم

السنة الجامعية: 2020/2019

قائمـــة المحتويات

القسم الأول: العمليات المالية في الأجل القصير.

القسم الثاني: العمليات المالية في الأجل الطويل.

القسم الثالث: سلاسل تمارين الأعمال الموجهة

القسم الثاني: العمليات المالية طويلة الأجل

الفصل الأول:

الفائدة المركـــبة

الفصل الأول: الفائدة المركبة

1. **مفهوم الفائدة المركبة.**
2. **قانون جملة الفائدة المركبة.**
3. **حساب الجملة المركبة في حالة المدة غير الكاملة.**
4. **علاقات عناصر الفائدة المركبة.**
5. **المعدل المتناسب والمعدل المكافئ.**

1. مفهوم الفائدة المركبة:

نقول عن فائدة أنها بسيطة إذا لم تدمج مع رأس المال الأصلي المستثمر لينتج بدوره فائدة أخرى، وتقول عن فائدة أنها مركبة إذا أضيفت أو أدمجت في نهاية الوحدة الزمنية مع رأس المال المستثمر الأصلي لكي تعطي بدورها فائدة خلال الوحدة الزمنية الموالية وهكذا في نهاية كل وحدة زمنية فإن الفائدة البسيطة تضاف إلى جملة رأس المال الوحدة الزمنية السابقة لكي تنتج بدورها فائدة خلال الوحدة الزمنية اللاحقة

ملاحظة: في ما يتعلق بالعمليات المالية من الأجل الطويل فإن الوحدة الزمنية الأكثر إستعمالا هي السنة ، وفي بعض الأحيان سداسي، ثلاثي، شهري

2. قانون جملة الفائدة المركبة:

لنفرض أن شخص إقتراض مبلغ قدره (C_0)لمدة (n) من السنوات وبمعدل tعلى أساس فائدة مركبة ، هذا الشخص مطالب بدفع قيمة القرض مضاف إليها مقدار الفائدة المركبة في نهاية المدة وفقا للقانون المستخرج من الجدول التالي:

الفترات	رأس المال في بداية الفترة	الفائدة الناتجة خلال المدة	القيمة المحصلة أو المكتسبة(الجملة)
1	C_0	C_0t	$C0 + C0t = C0(1 + t)$
2	$C0(1 + t)$	$C0(1 + t)t$	$C0(1 + t) = C0(1 + t)t$ $C0 = (1 + t)^2$
3	$C0(1 + t)^2$	$C0(1 + t)^2t$	$C0(1 + t)^2 + (1 + t)^2t$ $C0 = (1 + t)^3$
4	$C0(1 + t)^3$	$C0(1 + t)^3t$	$C0(1 + t)^4$
⋮			
n-1	$C0(1 + t)^{n-2}$	$C0(1 + t)^{n-2}t$	$C0(1 + t)^{n-1}$
n	$C0(1 + t)^{n-1}$	$C0(1 + t)^{n-1}t$	$C0(1 + t)^n$

من خلال الجدول السابق نستنتج أن قانون جملة الفائدة المركبة بالشكل التالي:

$$Cn = C0(1 + t)^n$$

حيث أن:

C_0: رأس المال الموظف أو المودع أو المقترض.

t: معدل الفائدة المركبة.

n: مدة الإستثمار وتكون أيضا مدة الإقراض وعادة ما تكون سنة.

Cn: تمثل القيمة المحصلة أو المكتسبة أو الجملة المحصل عليها.

مثال: كم سيصبح رأس المال قدره 150000دج أودع في بنك 6%سنويا، بعد 6سنوات من التوظيف وبرسملة سنوية للفوائد.

الحل:

$$Cn = C0(1+t)^n$$

$$C6 = 150000(1+0{,}06)^6$$

$$C6 = 212777{,}86DA$$

ملاحظات:

- القانون الأساسي لجملة الفائدة المركبة يطبق مهما كانت وحدة الزمن المستعملة شرط أن يكون المعدل المستخدم يقابل ويوافق مدة الرسملة.

مثال1: كم سيصبح رأس المال قدره 100000دج وظف خلال 10سنوات بمعدل سداسي قدره3% وبرسملة سداسية للفوائد.

$$C0 = 100000DA$$

$$t = 3\%$$

$$n = 10_{\text{سنوات}} \rightarrow n = 20_{\text{سداسي}}$$

$$C20 = 100000(1+0{,}03)^{20}$$

$$C20 = 180611{,}12$$

مثال2: أودع شخص مبلغ قدره 100000دج في بنك يحسب فوائد مركبة بمعدل 2% لكل 4 أشهر حدد الجملة التي يتحصل عليها هذا الشخص في نهاية السنة الخامسة للإيداع وبرسملة سنوية للفوائد

$$C0 = 100000DA$$

$$t = 2\%$$

$$n = 5_{\text{سنوات}}$$

$t = 2\% \Longrightarrow t = 6\%$ سنويا

$$C5 = 10000(1 + 0,06)^5$$

$$C5 = 133822,55$$

- نلاحظ أن الجملة المحصل عليها من توظيف رأس مال قدره C0 خلال الفترة من 1 إلى n تمثل متتالية حسابية أساسها $r = 1 + t$. عدد حدودها n.

3. حساب الجملة المركبة في حالة كون المدة كسرية (غير كاملة):

أثناء إشتقاقللقانون جملة الفائدة المركبة إفترضنا أن مدة الإقتراض أو مدة الإقتراضأومدة التوظيف n عدد صحيح، لكن في الواقع قد تكون هذه المدة غير صحيحة أو كسرية مثلا تكون المدة 8 سنوات و5أشهر، إن مثل هذه المسائل يمكن حلها بطريقتين:

أ. ط$_1$: طريقة الحل العقلاني (البنكية):

تعتمد هذه الطريقة على حساب الفائدة المركبة بإستعمال القانون العام للجملة بالنسبة للجزء الصحيح من مدة ثم إستعمال قانون الفائدة البسيطة بالنسبة للجزء العشرين، وهذا مايعرف بالحل العقلاني، وهناك من يسمى هذه الطريقة بالمنطقية، بحيث لا يمكن رسملة الفوائد إلا في نهاية الفترة وهي الطريقة المستعملة لدى البنوك.

مثال: ماهي جملة مبلغ مقترض قيمته 24000دج لمدة سنتين و4أشهر بمعدل فائدة4% سنويا

$$C0 = 24000DA$$

$$t = 4\%$$

$n =$ سنتين4أشهر

$$Cn = C0(1 + t)^n = 24000(1 + 0,04)^2$$

$$Cn = 25958{,}4$$

$$I = \frac{c \cdot t \cdot n}{1200} = \frac{25958{,}4 \times 4 \times 4}{1200}$$

$$\rightarrow I = 346{,}14$$

جملة سنتين و4أشهر:

$$Cn = 25958{,}4 + 346{,}112$$

$$Cn = 26304{,}512$$

ب. ط$_2$: الطريقة الرياضية:

في هذه الحالة المدة قانون الجملة تمثل كل الفترة الزمنية وبفضل أن المدة n تساوي:

$$n = K + {}^{p}/_{q}$$

حيث أن: الجزء الصحيح Kمن التوظيف.

${}^{p}/_{q}$ الجزء الكسري من التوظيف فإن الجملة Cn تكون كما يلي:

$$Cn = C0(1+t)^{n}$$

$$Cn = C0(1+t)^{k+{}^{p}/_{q}}$$

$$Cn = C0(1+t)^{k} \times (1+t)^{{}^{p}/_{q}}$$

مثال: نفس المثال السابق.

$$C0 = 24000, t = 4\%$$

$$Cn = 24000(1+0{,}04)^{2} \times (1+0{,}04)^{{}^{4}/_{12}}$$

$$Cn = 26296{,}55$$

ملاحظات:

- من خلال ما سبق نلاحظ أن في الواقع هناك طريقتين لحساب المدة في حالة الأشهر والسنوات وحتى الأيام.
- وهناك طريقة أخرى تعتمد على الجداول المالية ، وتعرف بطريقة التناسب حيث يعتمد الجدول المالي رقم 1مع تحديد الفائدة الخاصة بالشهور بالأيام المعينة بعد nمن السنوات الكاملة.
- في حالة إستعمال الفائدة المركبة والفائدة البسيطة مثل ما سبق تسمى العملية بالرسملة المختلطة.

4. علاقات عناصر جملة الفائدة المركبة:

لقد كانت العلاقة الأساسية أو الجملة للفائدة المركبة أهم العلاقات في هذا الموضوع ومن هنا يستخرج مختلف العناصر الأخرى.

أ. القيمة الحالية:

القيمة الحالية للجملة هي قيمة المبلغ المستثمر في بداية المدة الحصول على الجملة في نهايتها وهي تمثل C_0

$$Cn = C0(1+t)^n$$

$$C0 = \frac{Cn}{(1+t)^n} \Rightarrow C0 = Cn(1+t)^{-n}$$

$$C0 = Cn(1+t)^{-n}$$

ولصعوبة حساب القيمة $(1+t)^{n-}$يدويا فقط أعدلها جدول مالي تحت رقم 2، ولعدد من المعادلات والسنوات المستعملة وعادة يكون 1% إلى 25% والنسبة للمعدلات ومن سنة إلى 50سنة بالنسبة إلى السنوات.

ب. الفائدة المحصل عليها في مدة الرسملة:

وهي ما يتحمله مستعمل الأموال خلال مدة العقد المقدرة بـ nوهي الفرق بين القيمة الحالية والجملة ونرمز لها بالرمزi بحيث:

$$I = Cn - C0$$

$$= C0(1+t)^n - C0$$

$$I = C0[(1+t)^n - 1]$$

ج. معدل الفائدة:

معدل الفائدة أو النسبة المطبقة على المبلغ المودع والذي يرمز له بـــ tمن العلاقة العامة لجملة الفائدة المركبة نستطيع إيجاد علاقة لحسابه.

$$C0(1+t)^n$$

$$(1+t)^n = \frac{Cn}{C0}$$

$$1 + t = \sqrt[n]{\frac{Cn}{C0}}$$

$$\boldsymbol{t = \sqrt[n]{\frac{Cn}{C0}} - 1}$$

د. المدة الجملة:

من نفس العلاقة السابقة (جملة المركبة) هناكطريقتين لحساب المدة إما بإستعمال الجداول المالية أو إستخدامLog أو ln.وبإستعمالالجدوال الماليةتحسب القيمة التي بين قوسين$(1+t)^n$ وبمعلومية tوبإستخدام الجدول المالي رقم1 نصل لتحديد nبالنظر للجدول في عمود المدة المتقاطعة مع قيمة القوس عند المعدل t بحيث $(1+t)^n$ يساوي$\frac{Cn}{C0}$.

أما بإستعمال الجدول المالي رقم 2 نحسب قيمة قوس $(1+t)^{-n}$ وبنفس الطريقة تحصل على

n بإستعمال الجدول المالي رقم 2 بحيث $(1+t)^{-n}=\frac{Cn}{C0}$.

بإستعمال ln أو log إنطلاقا من علاقة الجملة: في غياب الجداول المالية نستعمل مميزات اللوغاريتم الوصول

لقيمة n بدون اللجوء للجداول المالية.

$$Cn = C0(1+t)^n$$

$$(1+t)^n = \frac{Cn}{C0}$$

$$\log(1+t)^n = \log\frac{Cn}{C0}$$

$$n\,log(1+t)^n = \ logCn - log0$$

$$n = \frac{\log Cn - \log C0}{log(1+t)}$$

5. المعدلات المتناسبة والمعدل المكافئ:

نستعمل معدلات الفائدة عادة سنوياً ، أي تحسب الفائدة على المبلغ مرة واحدة في كل نهاية سنة ، إلا أن هناك تطبيق لمعدل الفائدة كل 6 أشهر أو 3 أشهر أو أقل، وفي هذه الحالة تصبح المدة n للإيداع ليست بالسنوات بل عدد الفترات الجزئية من السنة ، وفي حالة تطبيق معدلات فائدة غير سنوية أو جزء من السنة يمكن التحدث عن معدلات متناسبة أو معدلات متكافئة.

أ. المعدلات المتناسبة:

نقول عن معدلين مرتبطين بمعدلات زمنية مختلفة أنهما متناسبان إذا تساوت نسبتهما مع النسبة بين وحداتها الزمنية الخاصة برسملتها، مثلا المعدل $t=\%10$ سنويا.

$$ta = 10\%$$

$$ts = \frac{ta}{2} = \frac{10\%}{12} = 5\%$$

$$tt = \frac{ta}{4} = \frac{10\%}{4} = 2{,}5$$

$$tm = \frac{ta}{12} = \frac{10\%}{12} = 0{,}833$$

ملاحظة:

إذا وظف رأس المال بفائدة بسيطة بمعدلين متناسبين لمدة معينة فإن القيمة المكتسبة تكون نفسها بينما يكون العكس في حالة التوظيف بفائدة مركبة فإن الفائدة المكتسبة تكون أكبر عندما تنخفض مدة الوحدة الزمنية.

ب. المعدلات المتكافئة:

نقول عن معدلين مرتبطين بوحدات زمنية مختلفة أنهما متكافئان إذا كانا يحققان نفس القيمة المكتسبة بفائدة مركبة لنفس رأس المال الموظف ولنفس المدة.

- إذا وظف مبلغ 1دج بمعدل سداسي t_s فإن القيمة المكتسبة لمدة سنة واحدة تساوي$(1+t)^2$

- نقول أن المعادلين ta وtsأنهما متكافئين إذا تساوت القيمة المكتسبة أي:

$$(1+ta) = (1+ts)^2$$

بالنسبة للمعدل الثلاثي المتكافؤ مع المعدل السنويta أي:

$$(1+ta) = (1+Tt)^4$$

بالنسبة للمعدل الشهري t_mالمتكافؤ معta فإن:

$$(1+ta) = (1+tm)^{12}$$

وبشكل عام إذا كان taهو المعدل السنوي فأن المعدلات المتكافئة له تكون بالعلاقة التالية:

$$(1+ts)=(1+ta)^{1/2}$$

$$(1+Tt)=(1+ta)^{1/4}$$

$$(1+tm)=(1+ta)^{1/12}$$

$$(1+tq)=(1+ta)^{1/q}$$

مثال: إذا كان المعدل السنوي 10%أحسب المعادلات المتكافئة له.

$$ta=10\%$$

$$(1+ts)=(1+ta)^{1/2}$$

$$(1+ts)=(1,1)^{1/2}-1 \Rightarrow ts=4,88\%$$

$$1+Tt=(1+ta)^{1/4}$$

$$1+Tt=(1\cdot 1)^{1/4}$$

$$Tt=(1\cdot 1)^{1/4}-1 \Rightarrow \mathrm{Tt}=2,41\%$$

$$1+\mathrm{tm}=(1+ta)^{1/12}$$

$$1+\mathrm{tm}=(1+ta)^{1/12}$$

$$1+\mathrm{tm}=(1\cdot 1)^{1/12}$$

$$\mathrm{tm}=(1\cdot 1)^{1/12}-1 \Rightarrow \mathrm{tm}=0,79\%$$