وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة زيـان عاشور الجلفـة
كليـة العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسـم العلوم المالية والمحاسبية

مطبوعة خاصة بالتدريس عن بعد:

مقرر: الرياضيات المالية

مقدمة لطلبة السنة ثانية جذع مشترك في العلوم المالية والمحاسبة

من إعـداد:

الدكتور. حديدي آدم

السنة الجامعية: 2020/2019

قائمـــــة المحتويات

القسم الأول: العمليات المالية في الأجل القصير.

القسم الثاني: العمليات المالية في الأجل الطويل.

القسم الثالث: سلاسل تمارين الأعمال الموجهة

الفصل الثالث:
الدفعات المالية

الفصل الثالث: الدفعات المالية

1. **دفعات نهاية المدة.**
2. **دفعات بداية المدة.**
3. **تسوية الديون بالدفعات.**

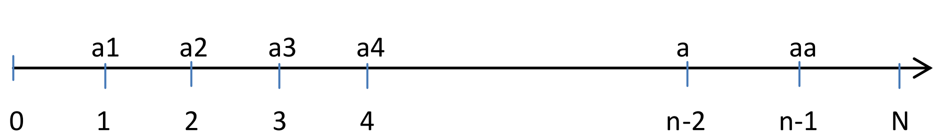
تمهيد:

يطلق مصطلح الدفعات بصفة عامة على المبالغ المتساوية المدفوعة بإنتظام خلال وحدات زمنية متتابعة ومتساوية يمكن أن تكون سنة وسداسي أو ثلاثي أو أي فترة من السنة ، حيث تكون هذه الدفعات من دفعات سداد(نهاية المدة)تسمى أيضا بالدفعات العادية وهي تدفع في آخر كل وحدة زمنية وموجهة لسداد الديوان ، بالإضافة إلى دفعات بداية المدة(التوظيف أو الإستثمار)وتسمى بالدفعات غير العادية ، وهي تدفع في بداية كل وحدة زمنية بغرض التوظيف أو الإستثمار أو موجهة لتكوين رأس المال.

1. دفعات نهاية المدة

أ. جملة دفعات نهاية المدة:

إذاافترضنا أن شخص كان يسدد في نهاية كل فترة دفعة من المال قدرها (a) مدة n من الوحدات الزمنية بمعدل فائدة مركبة قدره t، كما سنوضح في الشكل التالي:



نلاحظ من الشكل أن الدفعة الأخيرة تم تسديدها عند نهاية المدة أي عند n وبالتالي مدة لها ، نرمز لجملة دفعات نهاية المدة بـ(A) وهي تساوي مجموع الجمل المركبة لكل دفعة من الدفعات في الزمن n، أي عند تسديد الدفعة الأخيرة.

- جملة الدفعة الأولى: $a(1+t)^{n-1}$.
- جملة الدفعة الثانية: $a(1+t)^{n-2}$.
- جملة الدفعة الثالثة: $a(1+t)^{n-3}$.
- جملة$n-2$: $a(1+t)^{2}$.
- جملة$n-1$: $a(1+t)^{1}$.
- جملةn: a.

$$(A) = a(1+t)^{n-1} + a(1+t)^{n-2} + a(1+t)^{n-3} \cdots a(1+t)^{2} + a(1+t)^{1}$$

الجمع تبديلي:

$$A = a + a(1+t)^{1} + a(1+t)^{2} + \cdots + a(1+t)^{n-3} + a(1+t)^{n-2} + a(1+t)^{n-1}$$

نلاحظ من هذا المجموع أنه يمثل حدود متتالية هندسية أساسها $r = 1 + t$، حدها الأول a وعدد

حدودها nوعليه يكون:

$$A = a\left[\frac{(1+t)^{n} - 1}{(1+t) - 1}\right]$$

$$A = a\left[\frac{(1+t)^{n} - 1}{t}\right]$$

حيث أن:

A:جملة دفعات نهاية.

a:الدفعة الثابتة.

t:معدل الفائدة المركب.

n:عدد الدفعات.

ب. إستعمال علاقة دفعات نهاية المدة:

- **حساب الجملة:**

أحسب جملة 10 دفعات سداد قيمة كل دفعة 10000دج، مع العلم أن $t = 6\%$.

$$a = 10000, t = 6\% , n = 10$$

$$A = a\left[\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right]$$

$$A = 10000\left[\frac{(1+0{,}06)^{10} - 1}{0{,}06}\right]$$

$$A = 131807{,}95$$

- **حساب مبلغ بالدفعة:**

جملة دفعات تقدر بـ 1686994.12، نتجت عن سداد 12دفعة الدفعة الأولى تسدد في نهاية السنة الأولى بمعدل $t = 6\%$.

حساب مبلغ الدفعة:

$$A = a\left[\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right]$$

$$a = A\frac{t}{(1+t)^n - 1}$$

$$a = \frac{1686994{,}12 \times 0{,}06}{(1+0{,}06)^{12} - 1}$$

$$a = 100000$$

- **حساب عدد الدفعات:**

ماهو عدد الدفعات الواجب تسديدها للحصول على جملة تقدر بـ150000دج،إذا علمت أن قيمة

الدفعة الثابتة 10000و$t = \%7$.

$$A = a\left[\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right]$$

$$150000 = 1000\left[\frac{(1+0{,}07)^n - 1}{0{,}07}\right]$$

$$= (1+t) = \frac{\mathrm{A \cdot t}}{\mathrm{a}} + 1$$

$$(1{,}07)^n = 2{,}05$$

$$\log(1{,}07)^n = \log(2{,}5)$$

$$n = \frac{log(2{,}05)}{log(1{,}07)}$$

$$n = 10{,}60$$

الحل الثاني: تسديد الدفعة للحصول على جملة تقدر ب 150000دج بمعدل الفائدة %7وينتج عن قيمة

الدفعة الجديدة التي تكون أقل من *1000* دج $A(9503{,}53)$.

الحل الثالث: تسديد 10 دفعات قيمة كل دفعة 10000 وعند تسديد الدفعة الأخيرة تطبق دفعة تكميلية

تساوي الفرق بين الجملة المعطات 150000دج وجملة 10دفعات في كل دفعة 10000.

ج. القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

يمكن تعريف القيمة الحالية بأنها مجموع القيمة الحالية لعدد الدفعات الثابتة أي قيمة الدفعات عند إمضاء عقد القرض أو الإستثمار وهذا في الزمان أي في الزمن قبل الدفعة الأولى ونرمز له بالرمز Va كما هو موضح في الشكل التالي:

القيمة الحالية للدفعة 1: $a(1+t)^{-1}$

القيمة الحالية للدفعة2: $a(1+t)^{-2}$

$\vdots$

القيمة الحالية للدفعة: n−1$a(1+t)^{-n+1}$

القيمة الحالية: n$a(1+t)^{-n}$

$$Vn = a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} \cdots a(1+t)^{-n}$$

الجمع تبديلي:

$$Vn = a(1+t)^{-n} + \cdots + a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2}$$

وعليه فإن هذا المجموع يمثل حدود متتالية هندسية حدها الأول $a(1+t)^{-n}$ وأساسهاrهو$(1+t)$ وعدد حدودها n.

$$A = a\left[\frac{(1+t)^n - 1}{t}\right]$$

- **إستعمال علاقة القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة**

مثال: مؤسسة تضع تحت التصرف تجهيزات بقيمة 300000دج ثم التسديد عن طريق 5دفعات قيمة كل دفعة 80000 الدفعة الأولى تسدد نهاية السنة الأولى ماهي القيمة الحالية لمتتالية الدفعات 10%.

الحل:

$$n = 5 , t = 10\%$$

$$a = 80000\ , Va = ؟$$

$$Va = 80000\left(\frac{(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1}\right)$$

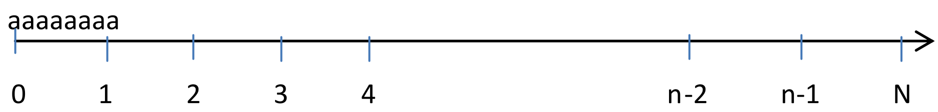
$$\Rightarrow Va = 303262{,}94$$

ملاحظة:في حساب مبلغ الدفعات ومعدل الفائدة وعدد الدفعات نتبع الخطوات المؤخوذة في الجملة.

2. دفعات بداية المدة:

أ. جملة دفعات بداية المدة

نفرض أن شخص وظف مبلغ ثابت يقدربـ a في أول كل وحدة زمنية لدى بنك يحسب الفوائد بمعدل t وذلك لمدة nمن الوحدات الزمنية ولتوضيح ذلك نستعين بالشكل التالي:



جملة دفعات بداية المدة تساوي مجموع الجمل المركبة لكل دفعة من الدفعات في نهاية المدة أي في الزمن n وبتعبير أدق بعد سداد الدفعة الأخيرة ونرمز لجملة بالدفعات لبداية المدة بالرمز A'.

الجملة المركبة للدفعة 1: $a(1+t)$

الجملة المركبة للدفعة 2: $a(1+t)^{n-1}$

$\vdots$

الجملة المركبة للدفعة$(n-1)$: $a(1+t)^{n}$

الجمع تبديلي:

$$A = a(1+t)^{n} + a(1+t)^{n-1} + \cdots + a(1+t)^{1}$$

$$\Rightarrow A' = a(1+t)^1 + \cdots + a(1+t)^{n-1} + a(1+t)^n$$

يمثل هذا المجموع متتالية هندسية حدها الأولى $a(1+t)$ وأساسهاهو$(1+t)$ وعدد حدودهاn.

$$A' = a(1+t)\left[\frac{(1+t)-1}{t}\right]$$

$$\Rightarrow A' = a\left[\frac{(1+t)^{n+1}-(1+t)}{t}\right]$$

$$A' = a\left[\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t}-1\right]$$

العلاقة بين الجملتين A وA':

$$A' = A(1+t)$$

ب. إستعمال علاقة جملة دفعات بداية المدة:

- **حساب بالجملة:**

نريد تكوين رأس مال بأربع دفعات متساوية مبلغ الواحدة 10000دج، تدفع الأولى عند إمضاء العقد ، معدل الفائدة السنوي 6%.

$$A' = a(1+t)\frac{(1+t)^n-1}{t}$$

$$A' = 10000(1,06)\frac{(1,06)^4-1}{0,06}$$

$$A' = 46370,93$$

- **حساب مبلغ الدفعة:**

$$A' = a(1+t)\left[\frac{(1+t)^n-1}{t}-1\right]$$

$$a = \frac{A't}{(1+t)[(1+t)^n - 1]}$$

ويكتب أيضا: $a = A'(1+t)^{-1} \frac{t}{(1+t)^n - 1}$

مثال: أحسب مبلغ الدفعة التي تسمح بتكوين رأس مال قدره 200000دج بعد 10سنوات، بمعدل 8%

الدفعة الأولى تكون عند الإتفاق.

$$a = 200000(1+0{,}08)^{-1} \frac{0{,}08}{(1{,}08)^{-1} - 1}$$

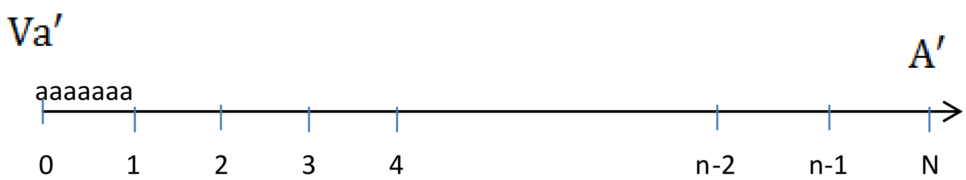
$$a = 12783{,}23$$

ملاحظة:

من خلال علاقة الجملة بالإضافة لحساب الدفعة يمكن حساب معدل الفائدة، كذا عدد الدفعات بتباع نفس الخطوات المتبعة سابقا في جملة نهاية المدة.

ج. القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

نرمز للقيمة الحالية لدفعات بداية المدةبVa'، القيمة الحالية لدفعات بداية المدة تساوي مجموع القيم الحالية لكل دفعة من الدفعات في الزمن يساوي الصفر أي عند تسديد الدفعة الأولى ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالي:



القيمة الحالية للدفعة الأولى ← a

الدفعة الثانية← $a(1+t)^{-1}$

الدفعة الثالثة← $a(1+t)^{-2}$

الدفعة الرابعة← $a(1+t)^{-2}$

$\vdots$

الدفعة ← $n-2a(1+t)^{-n+2}$

الدفعة← $n-1a(1+t)^{-n+1}$

$$Và=a+a(1+t)^{-1}+a(1+t)^{-2}+...+a(1+t)^{-n+2}+a(1+t)^{-n+1}$$

الجمع تبديلي:

$$Và=a(1+t)^{-n+1}+a(1+t)^{-n+2}+\cdots+a(1+t)^{-1}+a(1+t)^{-2}$$

وعليه فإن المجموع يشكل لنا متتالية هندسية حدها الأول $a(1+t)^{-n+1}$ وأساسها r هو (1+t)

وعدد حدودها n.

$$Và=a(1+t)^{-n+1}\left[\frac{(1+t)^{n}-1}{t}\right]$$

ومنه:

$$Và=a\left[\frac{(1+t)^{n-n+1}-(1+t)^{-n+1}}{t}\right]$$

$$Và=a\left[(1+t)^{1}-\frac{(1+t)^{-n+1}}{t}\right]$$

$$Và=a(1+t)\left[\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right]$$

ويكتب أيضا:

$$Và=a\left[\frac{(1+t)-(1+t)^{-n+1}}{t}\right]$$

$$V\grave{a} = a\left[\frac{t}{t} + \frac{1-(1+t)^{-n+1}}{t}\right]$$

$$V\grave{a} = a\left[1 + \frac{1-(1+t)^{-n+1}}{t}\right]$$

3. تسوية الديون بالدفعات

أ. تكافؤ الدفعات:

لكي تتكافؤ متتاليةدفعات مع متتالية أخرى وبنفس المعدل يجب أن تتساوى قيمتها الحالية عند تاريخ المقارنة بينهما.

مثال: مؤسسة مدينة لبنك مطالبة بتسديد أربع دفعات سنوية قيمة الواحدة 45000دج، طلبت من البنك تغيير العقد بتسديد 6دفعات سنوية متساوية وبمعدل معمول به 8%، ماهي قيمة الدفعة الجديدة إذا وافق البنك على تعديل.

$$(\text{القديمة})Va = Va(\text{الجديدة})$$

$$45000\frac{1-(1{,}08)^{-4}}{0{,}08} = a\frac{1-(1{,}08)^{-6}}{0{,}08}$$

$$a = 32240{,}82$$

ب. تاريخ الإستحقاق المتوسط المتتالية دفعات:

نسمي الإستحقاق المتوسط لمتتالية دفعات الزمن أو الفترة التي يكون فيه جملة الدفعات المسددة مع مجموع عددها.

$$Va = (1+t)^{x} = \text{na}$$

$$a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}(1+t)^{x}=na$$

$$(1+t)^{x}=\frac{nat}{a[1-(1+t)^{-n}]}$$

$$(1+t)^{x}=\frac{nt}{1-(1+t)^{-n}}$$

x: تاريخ الإستحقاق المتوسط

n: عدد الدفعات

مثال: أحسب الإستحقاق المتوسط لـ 10دفعات ثابتة لنهاية المدة بمعدل4%.

$$n=10$$

$$t=4\%$$

$$(1{,}04)^{x}=\frac{10\times 0{,}04}{1-(1{,}04)^{-10}}$$

$$\Longrightarrow 1{,}04=1{,}232909$$

طريقة التناسب:

$$(1{,}04)^{6}=1{,}265319$$

$$\frac{(1{,}04)^{5}=1{,}216653}{D=0{,}048666}$$

$$\frac{\begin{array}{c}(1{,}04)^{x}=1{,}232909\\(1{,}04)^{5}=1{,}216653\end{array}}{D=0{,}016256}$$

$$6-5\rightarrow 0{,}048666$$

$$x-5\rightarrow 0{,}016256$$

$$x - 5 = \frac{0{,}016256}{0{,}048666}$$

$$x - 5 = 0{,}33$$

$$\mathrm{x} = 5 + 3 + 28$$