REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE ZIANE ACHOUR

de Djelfa

Faculté des sciences exactes et de l'informatique

Département des Sciences de la Matière

Support TD

EXERCICES RESOLUES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

2019-2020

M.ZITOUNI

www.med.zitouni@gmail.com

Exercice 01 : (E.D à variables séparées)

1) $y' = y(y+1)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ (E_1)

On remplace $y' = \dfrac{d(y)}{d(x)}$, dans (E_1) puis on sépare les variables:

$$\frac{d(y)}{d(x)} = y(y+1) \Rightarrow \frac{d(y)}{y(y+1)} = d(x) \Rightarrow \int \frac{d(y)}{y(y+1)} = \int d(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} \Rightarrow (1)\frac{y(y+1)}{y(y+1)} = \frac{A(y+1)y}{y} + \frac{By(y+1)}{(y+1)} \Rightarrow 1 = A(y+1) + By$$

$$1 = (A+B)y + A \Rightarrow A = 1 \wedge A+B = 0 \Rightarrow A = -B \Rightarrow B = -1$$

Donc :

$$\int \frac{1}{y(y+1)} d(y) = \int \frac{d(y)}{y} - \int \frac{d(y)}{y+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y(y+1)} d(y) = \ln|y| - \ln|y+1| + c_1 = \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| + c_1$$

$$\int d(x) = x + c_2$$

$$\int \frac{1}{y(y+1)} d(y) = \int d(x) \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| + c_1 = x + c_2$$

$$\Rightarrow e^{\ln\left|\frac{y}{y+1}\right|} = e^{x+c_2} \Rightarrow \left|\frac{y}{y+1}\right| = ke^x \Rightarrow y = (y+1)ke^x \Rightarrow y(1-ke^x) = ke^x \Rightarrow y = \frac{ke^x}{1-ke^x}$$

2) $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ (E_2)

On remplace $y' = \dfrac{d(y)}{d(x)}$, dans (E_2) puis on sépare les variables:

$$2y\frac{d(y)}{d(x)}\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1} \Rightarrow 2\frac{yd(y)}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{d(x)}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int \frac{2yd(y)}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{d(x)}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2yd(y)}{\sqrt{y^2-1}} = ?$$

Posons le changement de variable:

$$z = y^2 - 1 \Rightarrow d(z) = 2yd(y)$$

$$\Rightarrow \int \frac{2yd(y)}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{d(z)}{\sqrt{z}} = \int z^{-\frac{1}{2}} d(z) = \frac{1}{1+(-\frac{1}{2})} z^{-\frac{1}{2}+1} = 2z^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{z} + c_1$$

$$\Rightarrow \int \frac{2yd(y)}{\sqrt{y^2-1}} = 2\sqrt{y^2-1} + c_1$$

De l'autre côté :

$$\Rightarrow \int \frac{d(x)}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} d(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + c_2$$

Finalement ;

$$\int \frac{2yd(y)}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{d(x)}{\sqrt{x}} \Rightarrow 2\sqrt{y^2-1} + c_1 = 2\sqrt{x} + c_2 \Rightarrow 2\sqrt{y^2-1} = 2\sqrt{x} + (c_2 - c_1)$$

$$\sqrt{y^2-1} = \sqrt{x} + (\frac{c_2 - c_1}{2}) = \sqrt{y^2-1} = \sqrt{x} + C \Rightarrow y^2 - 1 = (\sqrt{x}+C)^2 \Rightarrow y^2 = (\sqrt{x}+C)^2 + 1$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{(\sqrt{x}+C)^2+1}$$

3) $y' = \sin(x)\cos(y)$ (E_3)

On remplace $y' = \dfrac{d(y)}{d(x)}$, dans (E_3) puis on sépare les variables:

$$\frac{d(y)}{d(x)} = \sin(x)\cos(y) \Rightarrow \frac{d(y)}{\cos(y)} = \sin(x)d(x) \Rightarrow \int \frac{d(y)}{\cos(y)} = \int \sin(x)d(x)$$

$$\int \frac{d(y)}{\cos(y)} = ?$$

$\wedge$

$$\int \sin(x)d(x) = -\cos(x) + c_2$$

Pour l'intégrale contenant cos(y).

On utilise les équations trigonométriques, suivantes :

$$\cos(y)=\cos(\frac{y}{2}+\frac{y}{2})=\frac{\cos\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}-\sin\frac{y}{2}\sin\frac{y}{2}}{1}$$

$$\Rightarrow \cos(y)=\frac{\cos^2(\frac{y}{2})-\sin^2(\frac{y}{2})}{\cos^2(\frac{y}{2})+\sin^2(\frac{y}{2})}=\frac{\cos^2(\frac{y}{2})\left(1-\frac{\sin^2(\frac{y}{2})}{\cos^2(\frac{y}{2})}\right)}{\cos^2(\frac{y}{2})+\sin^2(\frac{y}{2})}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2(\frac{y}{2})\left(1-\frac{\sin^2(\frac{y}{2})}{\cos^2(\frac{y}{2})}\right)}{\cos^2(\frac{y}{2})(1+\frac{\sin^2(\frac{y}{2})}{\cos^2(\frac{y}{2})})}=\frac{\left(1-tg^2(\frac{y}{2})\right)}{(1+tg^2(\frac{y}{2}))}=\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}$$

$$t=tg(\frac{y}{2})\Rightarrow arctg(t)=\frac{y}{2}\Rightarrow y=2arctg(t)\Rightarrow d(y)=\frac{2d(t)}{1+t^2}$$

Alors :

$$\int\frac{d(y)}{\cos(y)}=\int\frac{\frac{2d(t)}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2d(t)}{1-t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2d(t)}{1-t^2}=\frac{A}{(1+t)}+\frac{B}{(1-t)}\Rightarrow A=1\wedge B=1$$

$$\Rightarrow \int\frac{d(y)}{\cos(y)}=\left(\int\frac{1}{(1+t)}dt+\int\frac{1}{(1-t)}dt\right)$$

$$\Rightarrow \int\frac{d(y)}{\cos(y)}=\left(\int\frac{1}{(1+t)}dt-\int\frac{-1}{(1-t)}dt\right)=(\ln|1+t|-\ln|1-t|)+c_1$$

$$\Rightarrow \int\frac{d(y)}{\cos(y)}=(\ln\left|\frac{|1+t|}{1-t}\right|)+c_1$$

$$\Rightarrow \int\frac{d(y)}{\cos(y)}=(\ln\left|\frac{1+tg(\frac{y}{2})}{1-tg(\frac{y}{2})}\right|)+c_1$$

Donc:

$$\Rightarrow \int \frac{d(y)}{\cos(y)} = \int \sin(x)d(x) = \ln\left|\frac{1+tg(\frac{y}{2})}{1-tg(\frac{y}{2})}\right| + c_1 =$$

$$\Rightarrow e^{\ln\left|\frac{1+tg(\frac{y}{2})}{1-tg(\frac{y}{2})}\right|} = e^{-\cos(x)+c_2-c_1} = \left|\frac{1+tg(\frac{y}{2})}{1-tg(\frac{y}{2})}\right| = ke^{-\cos(x)} \Rightarrow tg(\frac{y}{2}) = \left(\frac{ke^{-\cos(x)}-1}{ke^{-\cos(x)}+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{2} = arctg\left(\frac{ke^{-\cos(x)}-1}{ke^{-\cos(x)}+1}\right) \Rightarrow y = 2arctg\left(\frac{ke^{-\cos(x)}-1}{ke^{-\cos(x)}+1}\right)$$

4) $2yy'(1+e^x) = e^x$

5) $y'\sin(x) = y\ln(y)$, avec : $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

Exercice 02: (E.D.L du premier ordre)

1) $(2+x)y' = 2-y$

$(2+x)y' + y = 2$

C'est une EDL du premier ordre, (la solution générale est :$y_s=y_h+y_p$)

La solution homogène : ($f(x)$=0) :

$$(2+x)y' + y = 0 \Rightarrow (2+x)\frac{d(y)}{d(x)} + y = 0 \Rightarrow (2+x)\frac{d(y)}{d(x)} = -y \Rightarrow \frac{d(y)}{y} = \frac{d(x)}{2+x}$$

On intègre :

$$\int \frac{d(y)}{y} = \int \frac{d(x)}{2+x} = \ln|y| + c_1 = \ln|x+2| + c_2 \Rightarrow y_h = \frac{k}{x+2}$$

La solution particulière (par la méthode de variation de la constante) :

$$y_p = \frac{k(x)}{x+2} \Rightarrow y'_p = \frac{k'(x)(x+2) - k(x)}{(x+2)^2}$$

On remplace y_p et $y_p^{'}$ dans l'équation donné avec le deuxième terme :

$$(2+x)y'+y=2 \Rightarrow (2+x)\left(\frac{k^{'}(x)(x+2)-k(x)}{(x+2)^2}\right)-\frac{k(x)}{(x+2)}=2 \Rightarrow \frac{k^{'}(x)(x+2)-k(x)}{(x+2)}-\frac{k(x)}{(x+2)}=2$$

$$k^{'}(x)=2 \Rightarrow \int k^{'}(x)d(x)=\int 2d(x) \Rightarrow k(x)=2x$$

Donc la solution générale est :

$$y_s=\frac{k}{x+2}+\frac{2x}{x+2}$$

2) $xy'+y=\cos(x)$

La solution homogène :

$$xy'+y=0 \Rightarrow x\frac{d(y)}{d(x)}=-y \Rightarrow \frac{d(y)}{y}=-\frac{d(x)}{x} \Rightarrow \ln(y)=-\ln(x)+C \Rightarrow y_h=\frac{k}{x}$$

La solution particulière :

$$y_p=\frac{k(x)}{x} \Rightarrow y_p=\frac{k^{'}(x)x-k(x)}{x^2}$$

On remplace dans l'équation avec le second membre.

$$x\left(\frac{k^{'}(x)x-k(x)}{x^2}\right)+\frac{k(x)}{x}=\cos(x) \Rightarrow k^{'}(x)=\cos(x) \Rightarrow k(x)=\int \cos(x)d(x) \Rightarrow k(x)=\sin(x)$$

Finalement la solution générale set :

$$y_s=\frac{k}{x}+\frac{\sin(x)}{x}$$

3) $(1+x)y'+y=(1+x)\sin(x)$

La solution homogène :

$$(1+x)y'+y=0 \Rightarrow (1+x)\frac{d(y)}{d(x)}+y=0 \Rightarrow \frac{d(y)}{y}=-\frac{d(x)}{x+1} \Rightarrow y_h=\frac{k}{x+1}$$

SM 19/2020

La solution particulière :

$$y_p = \frac{k(x)}{x+1} \Rightarrow y'_p = \frac{k'(x)(x+1)-k(x)}{(x+1)^2}$$

$$(1+x)\left(\frac{k'(x)(x+1)-k(x)}{(x+1)^2}\right)+\frac{k(x)}{x+1} = (1+x)\sin(x) \Rightarrow k'(x) = \int (1+x)\sin(x)d(x)$$

L'intégration par partie (produit de deux fonctions) :

Posons :

$$u = 1+x \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = \sin(x) \Rightarrow v = -\cos(x) \Rightarrow k(x) = \int (1+x)\sin(x)d(x) = -(1+x)\cos(x) + \int \cos(x)d(x)$$
$$k(x) = -(1+x)\cos(x) + \sin(x)$$
$$\Rightarrow y_p = -\cos(x) + \frac{\sin(x)}{1+x}$$

Donc la solution générale:

$$y_S = \frac{k}{1+x} - \cos(x) + \frac{\sin(x)}{1+x}$$

4) $y' + 2xy = 2x$, avec : $y(0)=2$

La solution homogène :

$$y' + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{d(y)}{d(x)} = -2xy \Rightarrow \frac{d(y)}{y} = -2xd(x) \Rightarrow \ln(y) = -x^2 + C$$
$$\Rightarrow y_h = ke^{-x^2}$$

La solution particulière :

$$y_p = k(x)e^{-x^2} \Rightarrow y'_p = k'(x)e^{-x^2} - 2xk(x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(k'(x) - 2xk(x))$$

Reportons dans l'équation donnée :

$$e^{-x^2}(k'(x)-2xk(x)) + 2xk(x)e^{-x^2} = 2x \Rightarrow k'(x) = 2xe^{-x^2} \Rightarrow k(x) = e^{-x^2} \Rightarrow k(0) = 1$$
$$\Rightarrow y_p(0) = k(0)e^0 \Rightarrow y_p = 1$$

$$\Rightarrow y_s(x) = e^{-x^2} + 1$$

Pour les étudiants :

5) $x^3y' - x^2y = 1$

6) $xy' + 2y = \dfrac{x}{1+x^2}$

7) $xy' - 2y = \sqrt{x}$

8) $x^2y' + y = 1$

Exercice 03 : (E.D.L du second ordre)

1) $y'' - 7y' + 10y = 0$

EDL du deuxième ordre :

Equation caractéristique :

$r^2 - 7r + 10 = 0 \Rightarrow (r-5)(r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = 5 \wedge r_2 = 2$

Donc la solution générale est égale la solution homogène :

$y_s = y_h = C_1e^{5x} + C_2e^{2x}$

6) $y'' - 2y' + 34y = 0$

EDL du deuxième ordre :

Equation caractéristique :

$r^2 - 2r + 34 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(34) = -132 \Rightarrow \Delta = 132i^2 \Rightarrow r_1 = \dfrac{2-\sqrt{132}i}{2} \wedge r_2 = \dfrac{2+\sqrt{132}i}{2}$

Donc la solution générale est égale la solution homogène :

$y_s = y_h = (C_1(\cos(\dfrac{\sqrt{132}}{2}x) + C_2\sin(\dfrac{\sqrt{132}}{2}x))e^x$

SM 19/2020

2) $y``-8y`+7y = 7x^2+5x+6$

EDL du deuxième ordre :

Equation caractéristique :

$$r^2-8r+7=0 \Rightarrow \Delta = 64-4(7)=36 \Rightarrow r_1 = \frac{8-\sqrt{36}}{2}=1 \wedge r_2 = \frac{8+\sqrt{36}}{2}=7$$

Donc la solution homogène :

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{7x}$$

la solution particulière est de la forme:

$$y_p = p(x)e^{0x}$$

Le 0 n'est pas une solution de EC donc, $y_p = Ax^2+Bx+C$

$$y_p = Ax^2+Bx+C \Rightarrow y'_p = 2Ax+B \Rightarrow y''_p = 2A$$

On remplace y''_p, y''_p et y''_p dans l'équation donnée :

$$y''-8y'+7y=7x^2+5x+6 \Rightarrow 2A-8(2Ax+B)+7(Ax^2+Bx+C)=7x^2+5x+6$$
$$\Rightarrow 7Ax^2+(7B-16A)x+(2A-8B+7C)=7x^2+5x+6$$
$$\begin{cases} 7A=7 \Rightarrow A=1 \\ 7B-16A=5 \Rightarrow 7B=5+16 \Rightarrow 7B=21 \Rightarrow B=3 \\ 2A-8B+7C=6 \Rightarrow 7C=6+8B-2A \Rightarrow 7C=6+24-2 \Rightarrow C=4 \end{cases}$$

La solution générale est :

$$y_g = y_h + y_p = C_1e^x + C_2e^{7x} + x^2+3x+4$$

3) $y``-y`= 2(1-x)$ *avec :* $y(0) = y`(0) = 1$

EDL du deuxième ordre :

Equation caractéristique :

$$r^2-r=0 \Rightarrow r(r-1)=0 \Rightarrow r_1=0 \wedge r_2=1$$

Donc la solution homogène :

$$y_h = C_1 + C_2e^x$$

la solution particulière est de la forme:

SM 19/2020

$y_p = p(x)e^{0x}$

Le 0 est une racine simple de EC donc, $y_p = Ax^2 + Bx + C$

$y_p = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow y'_p = 2Ax + B \Rightarrow y''_p = 2A$

On remplace y''_p, y''_p et y''_p dans l'équation donnée :

$$y'' - y' = 2(1-x) \Rightarrow 2A - (2Ax + B) = 2(1-x)$$
$$\Rightarrow (-2A)x + (2A - B) = 2(1-x)$$
$$\begin{cases} -2A = -2 \Rightarrow A = 1 \\ 2A - B = 2 \Rightarrow B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

La solution générale est :

$$y_g = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^x + x^2$$

On utilise les conditions initiales :

$$y_g(0) = y'_g(0) = 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ y'_g(0) = 1 \Rightarrow C_2 e^0 + 2(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \Rightarrow C_1 + 1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \end{cases}$$

La solution générale est :

$$y_g = e^x + x^2$$

7) $y``-2y`+10y = 10x^2 + 18x + 6$

8) $4y``+16y`+15y = 4e^{\frac{-3}{2}x}$

4) $y``-2y`+y = 10\cos(2x) + 5\sin(2x)$

9) $y``-4y`+4y = 8\left(x + e^{2x} + \sin(2x)\right)$

5) $y'' + 2y' - 3y = (8x - 6)e^{-3x}$