COURS:

Introduction à la théorie des opérateurs linéaires

Pour 3^{iéme} année mathématiques (LMD-S6).

Par :

Dr. Bilal BASTI

E-mail : bilalbasti@gmail.com
b.basti@univ-djelfa.dz

Mars 2020

INTRODUCTION A LA THEORIE DES OPERATEURS LINEAIRES

BILAL BASTI
Professeur de maths au Université Ziane Achour Djelfa **(Algérie)**

Semestre 2 (2019/2020)

Chapitre 1

ESPACES VECTORIELS NORMÉS ET ESPACES DE BANACH

Durant tout ce cours, $\mathbb{K}$ désignera le corps des nombres réels ou complexes.

1.1 Quelques inégalités célèbres

Commençons ce chapitre par certaines inégalités célèbres et très utiles pour la suite.

Lemme 1.1.1 *(Inégalité de Young) Soient $p, q \in]1, +\infty[$ et vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour tous réels positifs a et b,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Preuve. Rappelons tout d'abord que la fonction logarythme népérien est une fonction concave :

$$\left\{ \begin{array}{c} x \geq 0 \quad et \quad y \geq 0 \\ \alpha \geq 0 \quad , \quad \beta \geq 0 \quad et \quad \alpha + \beta = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha \ln(x) + \beta \ln(y) \leq \ln(\alpha x + \beta y) \tag{1.1}$$

Posons :

$$x = a^p, \quad y = b^q, \quad \alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}$$

Alors, d'après 1.1,

$$\ln(ab) = \ln\left((a^p)^{\frac{1}{p}} (b^q)^{\frac{1}{q}} \right) = \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right).$$

En passant à l'exponentielle, on obtient le résultat souhaité. ■

Proposition 1.1.2 *(Inégalité de Cauchy[1]-Schwarz[2]) Soient $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ et $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ deux suites de nombres réels ou complexes,*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 \prec +\infty \qquad et \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^2 \prec +\infty$$

[1] Auguste Louis Cauchy : mathématicien français, né le 21 août 1789 à Paris, mort le 23 mai 1857 à Sceaux.

[2] Hermann Amandus Schwarz : mathématicien allemand, né le 25 janvier 1843 à Hermsdorf, mort le 30 novembre 1921 à Berlin.

Alors,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Preuve. *Il suffit de montrer que :*

$$\forall N \in \mathbb{N}^* : \quad \sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'obtient alors, en faisant tendre N vers $+\infty$.
Pour tout réel λ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} (|x_i| + \lambda |y_i|)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| + \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 .$$

$P(\lambda)$ est un polynôme du second degré en λ, vérifiant $P(\lambda) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc, son déscriminant réduit Δ', vérifie la condition :

$$\Delta' = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i|\right)^2 - \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 \leq 0.$$

D'où,

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i|\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 . \sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 .$$

■

Proposition 1.1.3 *(Inégalité de Hölder[3]) Soient $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ et $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ deux suites de nombres réels ou complexes,*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \prec +\infty \qquad et \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q \prec +\infty \qquad \left(p, q \in \left]1, +\infty\right[\quad et \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

Alors,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Preuve. *Supposons en premier supposer que :*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p = \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q = 1, \tag{1.3}$$

D'après le lemme,

$$(\forall i = 1, 2, ...) : \qquad |x_i y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}.$$

D'où en sommant et en tenant compte du fait que $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p = \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q = 1$, on obtient que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} .$$

[3] Otto Hölder : matématicien allemand, né le 22 décembre 1859 à Stuttgart, mort le 29 août 1937 à Leipzig.

Considérons maintenant le cas général et posons :

$$\begin{cases} x = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & X_i = \dfrac{x_i}{x} \\ & \qquad (i = 1, 2, ...) . \\ y = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}, & Y_i = \dfrac{y_i}{y} \end{cases}$$

On a,

$$\sum_{i=1}^{N} |X_i|^p = \sum_{i=1}^{N} |Y_i|^q = 1.$$

Donc, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} |X_i Y_i| &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|x_i y_i|}{xy} = \frac{1}{xy} \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \\ &\le \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |X_i|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |Y_i|^q\right)^{\dfrac{1}{q}} = \frac{1}{xy} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q\right)^{\dfrac{1}{q}} . \end{aligned}$$

Donc finalement,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^q\right)^{\dfrac{1}{q}} .$$

■

Remarque. L'inégalité de Cauchy - Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder ($p = q = 2$). ■

Proposition 1.1.4 *(Inégalité de Minkovski[4]) Soient* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ *et* $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ *deux suites de nombres réels ou complexes,*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \prec +\infty \qquad et \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^p \prec +\infty \qquad (p \in [1, \ +\infty[)$$

Alors,

$$\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^p\right)^{\dfrac{1}{p}}$$

Preuve. *Remarquons tout d'abord que le cas* $p = 1$ *est trivial. Supposons donc que* $p \succ 1$ *alors,*

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \le |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} . \tag{1.4}$$

Soit q *le nombre réel positif, vérifiant* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Soit* $N \in \mathbb{N}$ *, en appliquant l'inégalité de Hölder aux suites finies*

$$(x_i)_{i=1}^N \quad et \quad \left(|x_i + y_i|^{p-1}\right)_{i=1}^N ,$$

[4] Hermann Minkovski (ou Minkowski) : Mathématicien et physicien Allemand né en 1864 en Russie et mort en 1909 en Allemagne.

on obtient :

$$\sum_{i=1}^{N}|x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}\leq\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^{p}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.5}$$

De la même manière, en appliquant l'inégalité de Hölder aux suites finies

$$(y_i)_{i=1}^{N}\quad et\quad\left(|x_i+y_i|^{p-1}\right)_{i=1}^{N},$$

on obtient :

$$\sum_{i=1}^{N}|y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}\leq\left(\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^{p}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.6}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^p &\leq \sum_{i=1}^{N}|x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{N}|y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}\\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

D'où,

$$\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^p\right).\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^p\right)^{-1+\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans 1.7, on obtient l'inégalité recherchée. ■

Il est connu du cours de "mesure et intègration" que les inégalités précédentes admettent les versions intègrales suivantes :

Proposition 1.1.5 *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle fini $I=[a,\ b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que pour tous $p,q\in\,]1,\ +\infty[$,*

$$\int_a^b|f(x)|^p\,dx\prec+\infty\qquad et\qquad\int_a^b|g(x)|^q\,dx\prec+\infty.$$

Alors, on a les inégalités suivantes :

1. *Intègrale de Hölder* $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

2. *Dans le cas particulier,* $p=q=2$*, on obtient l'inégalité intègrale de Cauchy-Schwarz :*

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

3. *Inégalité intègrale de Minkovsky* $(p=q)$

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Remarque. Comme dans le cas discret, l'inégalité intègrale de Minkovsky, reste vraie même pour $p=1$. ■

1.2 Espaces vectoriels normés (evn)

Définition 1.2.1 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$ *-espace vectoriel. On appelle norme sur* E *toute application* $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$*, vérifiant :*

N1. $\forall x \in E : \quad \|x\| \geq 0 \quad et \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$

N2. *Inégalité triangulaire.* $\forall x, y \in E : \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|;$

N3. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \quad \|\lambda \bullet x\| = |\lambda| . \|x\| .$

Remarques.

1. Toute norme définit une distance suivant la formule :

$$\forall x, y \in E : \quad d(x,y) = \|x-y\|;$$

   On dit dans ce cas que la métrique d dérive de la norme $\|.\|$.

2. Si une distance d sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E vérifie les conditions :

$$\forall x,y,z \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad et \quad d(\lambda \bullet x, \lambda \bullet y) = |\lambda|\, d(x,y)$$

   alors, l'application $\|.\|$ définie sur E par : $\|x\| = d(x,0)$, définit sur E une norme de laquelle, dérive la métrique d (démontrer).

■

Définition 1.2.2 *Un espace normé (evn) est un couple* $(E,\ \|.\|)$*, constitué d'un* $\mathbb{K}$ *-espace vectoriel* E *et d'une norme* $\|.\|$ *sur cet espace.*

Remarque. Dans un espace normé, on a l'inégalité triangulaire inversée :

$$\forall x, y \in E : |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\| \tag{1.8}$$

■

Exemples. Les espaces suivants sont tous des espaces normés (vérifier).

1. $E = \mathbb{K}^n$,
$$x = (x_1, ..., x_n) \Longrightarrow \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$$
2. $E = \mathbb{K}^n$,
$$x = (x_1, ..., x_n) \Longrightarrow \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$
3. $E = \mathbb{K}^n$,
$$x = (x_1, ..., x_n) \Longrightarrow \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| .$$
4. $E = l^p(\mathbb{K})$, $\quad (p \geq 1)$,
$$l^p(\mathbb{K}) = x = (x_1, ..., x_n, ...) : x_i \in \mathbb{K} \quad (\forall i) \quad et \quad \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \prec +\infty$$
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$
5. $E = L^p(I)$ -ensemble des fonctions définies sur $I = [a, \ b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et vérifiant,
$$\int_I |f(x)|^p \, dx \prec +\infty,$$
on obtient une norme en posant :
$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} . \quad p \geq 1$$
Dans l'espace $E = L^p(I)$, deux fonctions égales presque partout sont supposées identiques.
6. $E = \mathbb{K}[X]$ - l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$,
$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n \Longrightarrow \|P\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |a_i| .$$

■

Remarque. Dans tous les exemples cités plus haut (sauf l'exemple 5), l'inégalité triangulaire s'obtient par application de l'inégalité de Minkovski. ■

Définition 1.2.3 *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur E. $\|.\|_1$ est dite équivalente à $\|.\|_2$ si,*
$$\exists \alpha \succ 0 \quad et \quad \exists \beta \succ 0 : \ \forall x \in E; \quad \alpha. \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta. \|x\|_2 \tag{1.9}$$

Remarques.

1. Si $\|.\|_1$ est équivalente à $\|.\|_2$ alors, $\|.\|_2$ est équivalente à $\|.\|_1$.
2. Dans $E = \mathbb{K}^n$, les trois normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes. Cela découle des inégalités évidentes suivantes :
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \qquad et \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \tag{1.10}$$

3. D'une manière générale, dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (Voir TD).
4. En dimension infinie, on peut trouver dans un même espace deux normes non équivalentes.

■

Proposition 1.2.4 *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur E. Alors, ces deux normes ne sont pas équivalentes si et seulement si, il existe une suite d'éléments de E telles que l'une des deux suites numériques $\left(\frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1}\right)_n$ et $\left(\frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2}\right)_n$ n'est pas bornée.*

Preuve. Supposons que les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes. On a donc,

$$\forall \alpha \succ 0 \ \ et \ \ \forall \beta \succ 0; \ \exists x = x(\alpha, \beta) \neq 0 \in E : \quad \alpha. \|x\|_2 \succ \|x\|_1 \quad ou \quad \|x\|_1 \succ \beta. \|x\|_2 . \tag{1.11}$$

En prenant dans 1.11, $\alpha = \frac{1}{n} \in \mathbb{N}^*$ et $\beta = n$, on obtient,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists x_n \in E : \quad \|x_n\|_2 \succ n. \|x_n\|_1 \quad ou \quad \|x_n\|_1 \succ n. \|x_n\|_2 .$$

Donc, au moins l'une des deux suites $\left(\frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1}\right)_n$ et $\left(\frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2}\right)_n$ n'est pas bornée.

Inversement, supposons que l'une des deux suites par exemple $\left(\frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2}\right)_n$ n'est pas bornée. On aura donc,

$$\forall M \succ 0, \quad \exists n_M \in \mathbb{N} : \quad \frac{\|x_{n_M}\|_1}{\|x_{n_M}\|_2} \succ M \tag{1.12}$$

Si les deux normes étaient équivalentes, on aurait :

$$\exists M_1 \succ 0 \ \ et \ \ \exists M_2 \succ 0 : \ \forall x \in E; \quad M_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M_2 \|x\|_2$$

D'où,

$$\exists M_2 \succ 0 : \ \forall x \in E : \quad \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq M_2 \tag{1.13}$$

Il est clair que les relations 1.12 et 1.13 ne peuvent pas être vérifiées en même temps. Donc, les deux normes ne sont pas équivalentes. ■

1.3 Concepts de Base

Etant donné un evn $(E, \ \|.\|)$, on a les concepts de base suivants :

Définition 1.3.1 *Soit $(E, \ \|.\|)$ un evn. On appelle :*

$\mathbf{B_O}$. *boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r \succ 0$ l'ensemble,*

$$B_O(a, r) = \{x \in E; \quad \|x - a\| \prec r\} ;$$

$\mathbf{B_F}$. *boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r \succ 0$ l'ensemble,*

$$B_F(a, r) = \{x \in E; \quad \|x - a\| \leq r\} .$$

On a toujours, $B_O(a, r) \subset B_F(a, r)$.

Remarque. D'une manière générale, dans un evn E, on peut trouver des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées. ■

Définition 1.3.2 *Soient $(E, \ \|.\|)$ un evn et une partie M non vide de M. On appelle diamètre de M le réel positif ou nul :*

$$\delta(M) = \sup_{x, \ y \ \in \ M} \|x - y\| . \tag{1.14}$$

Remarque. On a :

$$\delta(B_O(a,r)) = \delta(B_F(a,r)) = 2r$$

■

Définition 1.3.3 *Une partie M non vide de E est bornée dans $(E, \ \|.\|)$ si on peut l'inclure dans une boule ouverte ou fermée de $(E, \ \|.\|)$ de rayon fini.*

Exercice 1.3.4 *Une partie M non vide de E est bornée dans $(E, \ \|.\|)$ si et seulement si, son diamètre est fini.*

Définition 1.3.5 *Une partie M non vide de E est dite ouverte dans $(E, \ \|.\|)$ si, tout point $a \in M$ est le centre d'une boule ouverte <u>entièrement contenue</u> dans M. M est dite fermée dans $(E, \ \|.\|)$ si, son complémentaire est ouvert dans $(E, \ \|.\|)$.*

Exercice 1.3.6 *Une partie M non vide d'un evn $(E, \ \|.\|)$ est ouverte dans $(E, \ \|.\|)$ si et seulement si, elle peut s'écrire sous forme d'une réunion de boules ouvertes de centres, apartenant tous à M :*

$$M \text{ ouvert de } (E, \ \|.\|) \Longleftrightarrow M = \bigcup_{i \in I} B_O(a_i, r_i) ; \quad a_i \in M, \quad r_i \succ 0.$$

Définition 1.3.7 *On dit qu'un point $a \in E$ adhère au sous-ensemble M de E, si toute boule ouverte de centre a, rencontre M. L'ensemble des points de E, adhérant à M se note $\overline{M}$ (adhérence de M) :*

$$a \in \overline{M} \Longleftrightarrow \forall r \succ 0 : \ M \cap B_O(a,r) \neq \varnothing$$

Géométriquement, cela signifie qu'il est impossible d'isoler a de M par une boule ouverte de centre a.

Exercice 1.3.8 *Le point $a \in E$ adhère à M si et seulement si, tout ouvert de E contenant a, rencontre M.*

Définition 1.3.9 *Soit $(E, \ \|.\|)$ un evn. Une partie M non vide de E est dite dense dans E $\left(\text{on écrit } \overline{M} = E \right)$ si, toute boule ouverte de E rencontre M.*

Exemple 1.3.10 *L'ensemble des nombres rationnels est partout dense dans l'ensemble des réels. Plus généralement, $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$ (démontrer !).*

Définition 1.3.11 *Un evn $(E, \ \|.\|)$ est dit séparable s'il existe un ensemble dénombrable dense dans E.*

Exemple 1.3.12 *Tous les espaces cités plus haut sont des espaces séparables.*

1.4 Espaces de Banach

Définition 1.4.1 *Soit $(E, \ \|.\|)$ un evn. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E converge vers $x \in E$ si,*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n \succ n_\varepsilon ; \quad \|x_n - x\| \prec \varepsilon \qquad \left(\text{on écrit} : \lim_{n \ \longrightarrow \ + \ \infty} x_n = x \right) \tag{1.15}$$

On dit aussi que la suite $(x_n)_n$ converge vers x dans $(E, \ \|.\|)$ ou que $(x_n)_n$ converge vers x pour la norme $\|.\|$.

Remarque. La définition de la convergence vers x signifie tout simplement que toute boule ouverte centrée en x, contient tous les éléments de la suite $(x_n)_n$ sauf peut-être un nombre fini d'entre eux. ■
Remarque. Dans un evn, la limité d'une suite convergente est unique. ■

Définition 1.4.2 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle suite de Cauchy dans $(E, \|.\|)$ toute suite d'éléments de E, vérifiant la condition :*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad \|x_n - x_m\| \prec \varepsilon \tag{1.16}$$

Remarque. Dans les relations 1.15 et 1.16, on peut remplacer $\underline{\varepsilon}$ par $\underline{\alpha\varepsilon}$ où $\underline{\alpha}$ est n'importe quelle constante strictement positive, $\alpha \succ 0$. ■

Proposition 1.4.3 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors, toute suite convergente est de Cauchy. L'inverse n'est pas vrai.*
Preuve. *Soit $(x_n)_n$ une suite convergente vers x dans l'espace $(E, \|.\|)$. On a :*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n \succ n_\varepsilon; \quad \|x_n - x\| \prec \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où,

$$\forall n, m \succ n_\varepsilon : \|x_n - x_m\| = \|(x_n - x) + (x - x_m)\| \le \|(x_n - x)\| + \|x - x_m\| \prec \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Pour montrer que l'inverse n'est pas vrai, il suffit de considérer dans l'espace $(\mathbb{Q}, |.|)$ la suite $\left(x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n.}$. C'est une suite de Cauchy mais sa limite est le nombre $e \notin \mathbb{Q}$. ■

Définition 1.4.4 *Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit de Banach*[5] *ou tout simplement B -espace s'il est complet pour la norme $\|.\|$ c'est à dire que toute suite de Cauchy de $(E, \|.\|)$ converge dans $(E, \|.\|)$. En d'autres termes, un espace de Banach est un evn dans lequel les notions de suite convergente et suite de Cauchy coïncident.*

Exemples.

1. L'espace $(\mathbb{R}, |.|)$ est un B -espace (cours d'analyse mathématique).

2. L'espace $(\mathbb{C}, |.|)$ est un B -espace. En effet, soit $(z_n = x_n + iy_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$.

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad |z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \prec \varepsilon$$

Il s'ensuit que :

$$\forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad \begin{cases} |x_n - x_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2} \le \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \prec \varepsilon \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad et \\ |y_n - y_m| = \sqrt{(y_n - y_m)^2} \le \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \prec \varepsilon \end{cases}$$

En d'autres termes, les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont des suites de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$ qui est complet (de Banach). Il existe donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x \qquad et \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} y_n = y$$

[5] Stefan Banach : mathématicien polonais, né le 30 mars 1892 à Cracovie (Pologe), mort le 31 aout 1945 à Lviv (Ukraine).

Par conséquent,

$$\forall\forall\varepsilon \succ 0,\ \exists n_{1\varepsilon} \in \mathbb{N},\ \exists n_{2\varepsilon} \in \mathbb{N} : \begin{cases} \forall n \succ n_{1\varepsilon}; & |x_n - x| \prec \varepsilon \\ & et \\ \forall n \succ n_{2\varepsilon}; & |y_n - y| \prec \varepsilon \end{cases}$$

Posons $n_\varepsilon = \max(n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon})$ et $z = x + iy$. Alors,

$$n \succ n_\varepsilon \Longrightarrow \begin{cases} n \succ n_{1\varepsilon} \\ et \\ n \succ n_{2\varepsilon} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |x_n - x| \prec \varepsilon \\ et \\ |y_n - y| \prec \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow |z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = \varepsilon\sqrt{2}$$

c'est à dire que la suite converge $(z_n)_n$ vers z dans $(\mathbb{C}, |.|)$.

3. L'espace $(\mathbb{K}^p, \|.\|_\infty)$ est un B -espace de dimension finie. En effet, soit $\left(x_n = \left(x_n^{(1)},\ x_n^{(2)}, ...,\ x_n^{(p)}\right)\right)_n$

une suite de Cauchy dans $(\mathbb{K}^p, \|.\|_\infty)$. On a :

$$\forall\varepsilon \succ 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall n, m \succ n_\varepsilon;\quad \|x_n - x_m\|_\infty = \sup_{1\ \leq\ k\ \leq\ p} \left|x_n^{(k)} - x_m^{(k)}\right| \prec \varepsilon$$

D'où,

$$\forall\ 1\ \leq\ k\ \leq\ p,\quad \forall n, m \succ n_\varepsilon;\quad \left|x_n^{(k)} - x_m^{(k)}\right| \prec \varepsilon$$

En d'autres termes, pour tout $k \in \{1, ..., p\}$, la suite $\left(x_n^{(k)}\right)_n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{K}, |.|)$ qui est complet (de Banach). Par conséquent,

$$\forall\ 1\ \leq\ k\ \leq\ p,\quad \exists x^{(k)} \in \mathbb{K} :\ \lim_{n\ \longrightarrow\ +\infty} x_n^{(k)} = x^{(k)}$$

Posons $x = \left(x^{(1)}, ..., x^{(p)}\right)$ alors,

$$\forall\varepsilon \succ 0,\ \forall\ 1\ \leq\ k\ \leq\ p,\ \exists n_{k\varepsilon} \in \mathbb{N} :\ \forall n \succ n_{k\varepsilon};\quad \left|x_n^{(k)} - x^{(k)}\right| \prec \varepsilon \tag{1.17}$$

Soit $n_\varepsilon = \max(n_{1\varepsilon}, .\quad, n_{p\varepsilon})$ alors, d'après 1.17,

$$\forall\varepsilon \succ 0,\ \forall\ 1\ \leq\ k\ \leq\ p,\ \forall n \succ n_\varepsilon;\ \left|x_n^{(k)} - x^{(k)}\right| \prec \varepsilon \Longrightarrow \forall\varepsilon \succ 0, \forall n \succ n_\varepsilon;\ \|x_n - x\|_\infty \prec \varepsilon.$$

C'est à dire que $(\mathbb{K}^p, \|.\|_\infty)$ est un B -espace.

■

Proposition 1.4.5 *Soit E un espace vectoriel et soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes équivalentes dans E. alors, pour toute suite $(x_n)_n$ dans E,*

1.

$$(x_n)_n \text{ de Cauchy pour la norme } \|.\|_1 \Longrightarrow (x_n)_n \text{ de Cauchy pour la norme } \|.\|_2$$

2.

$$(x_n)_n \text{ converge vers } x \text{ dans } (E,\ \|.\|_1) \Longrightarrow (x_n)_n \text{ converge vers } x \text{ dans } (E,\ \|.\|_2)$$

Preuve.

1. *Par hypothèse, il existe deux constantes* $\alpha \succ 0$ *et* $\beta \succ 0$ *telles que :*
$$\forall y \in E : \quad \alpha \|y\|_2 \leq \|y\|_1 \leq \beta \|y\|_2$$
Supposons que la suite $(x_n)_n$ *est de Cauchy pour la norme* $\|.\|_1$. *Alors,*
$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad \|x_n - x_m\|_1 \prec \varepsilon$$
D'où,
$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \succ n_\varepsilon; \quad \|x_n - x_m\|_2 \leq \frac{\|x_n - x_m\|_1}{\alpha} \prec \frac{\varepsilon}{\alpha}$$
ce qui en vertu de la remarque 1.4, signifie que la suite $(x_n)_n$ *est aussi de Cauchy pour la norme* $\|.\|_2$.
2. *S'obtient en remplaçant dans le raisonnement précédent* x_m *par* x.

■

Corollaire 1.4.6 *Les espaces* $(\mathbb{K}^p, \|.\|_1)$ *et* $(\mathbb{K}^p, \|.\|_2)$ *sont des* B *-espaces de dimension finie.*

Définition 1.4.7 *Une suite* $(x_n)_n$ *d'éléments d'un evn* $(E, \ \|.\|)$ *est dite bornée si :*
$$\exists r \succ 0 : \ \|x_n\| \leq r \quad \forall n \qquad (\Longleftrightarrow \forall n, \ x_n \in B_F(0, r))$$

Comme dans le cas réel, on démpontre facilement qu'une suite convergente ou de Cauchy est bornée, mais que l'inverse n'est pas vrai.

Définition 1.4.8 *Soient* $(E, \ \|.\|)$ *un evn et* $(E_n)_n$ *une suite de sous-ensembles de* E. *On dit que les* E_n *sont emboîtés si, pour tout* n, $E_{n+1} \subset E_n$.

Theorème 1.4.9 *(des boules emboîtées) Un evn* $(E, \ \|.\|)$ *est complet (de Banach) si et seulement si, toute suite* $(E_n)_n$ *de boules fermées emboîtées dont la suite* $(r_n)_n$ *des rayons tend vers* 0, *a une intersection non vide.*

Preuve. *Supposons que l'espace* $(E, \ \|.\|)$ *est complet et soit* $(E_n)_n$ *une suite de boules fermées emboîtées dont la suite des rayons tend vers* 0.*Il faut montrer que*
$$\bigcap_n E_n \neq \varnothing.$$

On a par hypothèse,
$$\forall n : \ E_n = B_F(a_n, \ r_n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} r_n = 0, \ (a_n \in E, \text{ est le centre de la boule } E_n). \quad (1.18)$$

Par ailleurs,
$$E_m \subset E_n \quad (\forall n, \quad \forall m \succcurlyeq n) \Longrightarrow \|a_n - a_m\| \leq r_n \quad . \quad (1.19)$$

Comme $\lim_{n \longrightarrow +\infty} r_n = 0$ *alors, il découle de la formule 1.19 que la suite* $(a_n)_n$ *des centres est de Cauchy et donc, converge vers un point* $a \in E$. *Montrons que*
$$a \in \bigcap_n E_n.$$

En effet, pour tout n, *la boule* E_n *contient tous les centres* $a_{n+1}, \ a_{n+2}, \ \ldots$. *La suite* $(a_k)_{k \geq n}$ *étant extraite de la suite* $(a_n)_n$ *converge aussi vers* a. *De plus,*
$$E_n \quad \text{fermée} \quad \text{et} \quad (a_k)_{k \geq n} \subset E_n \Longrightarrow a \in E_n \quad \forall n$$

Inversement, supposons que l'intersection de toute suite $(E_n)_n$ de boules fermées, emboîtées et dont la suite des rayons tend vers 0 est non vide et montrons que l'espace E est complet. Soit donc $(a_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de E. Ainsi donc,

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqq n_\varepsilon,\ \forall m \geqq n_\varepsilon;\quad \|a_n - a_m\| \prec \varepsilon. \tag{1.20}$$

En posant dans 1.20 $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, *on obtient qu'il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\|a_n - a_{n_1}\| \prec \frac{1}{2} \qquad (\forall n \geqq n_1).$$

Désignons par E_1 *la boule fermée de centre* $b_1 = a_{n_1}$ *et de rayon* $r_1 = 1$. *La suite* $(a_n)_{n \succ n_1}$ *est aussi de Cauchy. Donc, pour* $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}$, *on peut trouver* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n_2 \succ n_1 \quad \text{et} \quad \|a_n - a_{n_2}\| \prec \frac{1}{2^2} \qquad (\forall n \geqq n_2).$$

Désignons par E_2 *la boule fermée de centre* $b_2 = a_{n_2}$ *et de rayon* $r_2 = \frac{1}{2}$. *On a alors,*

$$x \in E_2 \Longrightarrow \|a_n - a_{n_2}\| \leqq \|x - a_{n_2}\| + \|a_{n_2} - a_{n_1}\| \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Longrightarrow x \in E_1.$$

D'où, $E_2 \subset E_1$. *De la même manière, la suite* $(a_n)_{n \succ n_2}$ *est aussi de Cauchy. Donc, pour* $\varepsilon = \varepsilon_3 = \frac{1}{2^3}$, *on peut trouver* $n_3 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n_3 \succ n_2 \succ n_1 \quad \text{et} \quad \|a_n - a_{n_3}\| \prec \frac{1}{2^3} \qquad (\forall n \geqq n_3).$$

Désignons par E_3 *la boule fermée de centre* $b_3 = a_{n_3}$ *et de rayon* $r_3 = \frac{1}{2^2}$. *On a alors,*

$$x \in E_3 \Longrightarrow \|x - a_{n_2}\| \leqq \|x - a_{n_3}\| + \|a_{n_3} - a_{n_2}\| \leqq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \prec \frac{1}{2} \Longrightarrow x \in E_2.$$

D'où, $E_3 \subset E_2$. *En continuant ce processus, on obtient une suite* $(E_k)_{k \geq 1}$ *de boules fermées emboîtées de centres respectifs* $b_k = a_{n_k}$ *et de rayons* $r_k = \frac{1}{2^{k-1}}$. $\left(\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} r_k = 0\right)$. *D'après l'hypothèse, il existe au moins un point* a *appartenant à tous les* E_k. *Par construction,* $0 \leq \lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} \|a_k - a\| = \lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} r_k = 0$. *Ainsi donc, la suite de Cauchy* $(a_n)_n$ *converge dans* E *qui est donc complet.* ■

Remarque. L'intersection des boules fermées et emboîtées X_n contient en réalité un seul point (vérifier !). ■

1.5 L'espace fonctionnel $C\left((E,\ F), \|.\|_\infty\right)$

Nous allons dans cette partie, introduire un espace de Banach très utilisé en analyse fonctionnelle. Il s'agit de l'espace des fonctions continues $C_{(E,\ F)}$.

Définition 1.5.1 *Soient* $(E,\ \|.\|_E)$ *et* $(F,\ \|.\|_F)$ *deux evn sur le même corps* $\mathbb{K}$. *Une application* $f : (E,\ \|.\|_E) \longrightarrow (F,\ \|.\|_F)$ *est dite continue au point* $a \in E$ *si,*

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists \delta = \delta(a, \varepsilon) \succ 0 :\ \forall x \in E,\quad \|x - a\|_E \prec \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \prec \varepsilon \tag{1.21}$$

Si f *est continue en tout point de* E, *on dit qu'elle est continue.*

Exemple 1.5.2 *Si $(E,\ \|.\|_E)$ est un evn alors l'application $x\mapsto\|x\|_E$ est continue de $(E,\ \|.\|_E)$ dans $(\mathbb{R},\ |.|)$.*

Par passage de la norme à la distance engendrée, on obtient les propriétés déjà connues des applications continues entre espaces métriques .

Proposition 1.5.3 *Si $f:(E,\ \|.\|_E)\longrightarrow(F,\ \|.\|_F)$ est continue alors, elle reste continue si on remplace $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ par des normes équivalentes.*

Définition 1.5.4 *Une fonction $f:(E,\ \|.\|_E)\longrightarrow(F,\ \|.\|_F)$ est dite séquentiellement continue en a si, pour toute suite $(a_n)_n$ d'éléments de E qui converge vers a dans $(E,\ \|.\|_E)$, la suite des images $(f(a_n))_n$ converge vers $f(a)$ dans $(F,\ \|.\|_F)$.*

Proposition 1.5.5 *Une fonction $f:(E,\ \|.\|_E)\longrightarrow(F,\ \|.\|_F)$ est continue en a si et seulement si, elle est séquentiellement continue en a.*

Désignons par $C_{(E,\ F)}$ l'ensemble des fonctions continues de E dans F. $C_{(E,\ F)}$ peut être muni d'une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel en posant :

1. $\forall f,g\in C_{(E,\ F)},\ \forall x\in E:\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)\,;$
2. $\forall f\in C_{(E,\ F)},\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall x\in E:\ (\lambda\bullet f)(x)=\lambda\bullet f(x)\,.$

On définit une norme dans $C_{(E,\ F)}$ par la formule,

$$\forall f\in C_{(E,\ F)}:\ \ \|f\|_\infty=\sup_{x\in E}\|f(x)\|_F\,.$$

Proposition 1.5.6 *Si l'espace F est de Banach alors $\left(C_{(E,\ F)},\ \|.\|_\infty\right)$ est aussi de Banach.*
Preuve. *Soit $(f_n)_n$ une suite dans de Cauchy dans $\left(C_{(E,\ F)},\ \|.\|_\infty\right)$. On a donc,*

$$\forall\varepsilon\succ 0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:\ \ \forall n,m\succ n_\varepsilon;\ \ \sup_{x\in E}\|f_n(x)-f_m(x)\|_F\prec\varepsilon.$$

D'où,

$$\forall\varepsilon\succ 0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \ \forall x\in E,:\ \ \forall n,m\succ n_\varepsilon;\ \ \|f_n(x)-f_m(x)\|_F\prec\varepsilon.\tag{1.22}$$

La formule 1.22, signifie que pour tout $x\in E$ (fixé), la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $(F,\ \|.\|_F)$. Elle converge donc vers un élément qu'on notera y de $(F,\ \|.\|_F)$. On obtient ainsi une fonction :

$$f:E\longrightarrow F;\quad x\longmapsto y=f(x)=\lim_{n\ \longrightarrow\ +\ \infty}f_n(x)\tag{1.23}$$

Montrons que la fonction f ainsi obtenue est un élément de $C_{(E,\ F)}$ (c'est à dire qu'elle est continue). Soit $\varepsilon\succ 0$ alors, $\forall x,\ a\in E$:

$$d_F(f(x),\ f(a))=\|f(x)-f(a)\|_F\leq\|f(x)-f_n(x)\|_F+\|f_n(x)-f_n(a)\|_F+\|f_n(a)-f(a)\|_F\,.\tag{1.24}$$

D'après 1.23,

$$\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}:\ \forall n\succ n_\varepsilon;\ \ \|f_n(x)-f(x)\|_F\prec\varepsilon,\ \ \forall x\in E\ \ et\quad\|f_n(a)-f(a)\|_F\prec\varepsilon.\tag{1.25}$$

Par ailleurs,

$$f_n\ \ continue\Longrightarrow\exists\delta_\varepsilon\succ 0:\ \ \|x-a\|_E\prec\delta_\varepsilon\Longrightarrow\|f_n(x)-f_n(a)\|_F\prec\varepsilon.\tag{1.26}$$

Les formules 1.24, 1.25 et 1.26 nous donnent,

$$\exists\delta_\varepsilon\succ 0:\ \ \|x-a\|_E\prec\delta_\varepsilon\Longrightarrow\|f_n(x)-f_n(a)\|_F\prec 3\varepsilon.$$

D'où la continuité de la fonction f. Il nous reste à montrer que la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $\left(C_{(E,\ F)},\ \|.\|_\infty\right)$. En utilisant la continuité de l'application norme dans la formule 1.22, on obtient par passage à la limite :

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\quad \forall x \in E,:\quad \forall n \succ n_\varepsilon;\quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \prec \varepsilon.$$

En d'autres termes,

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}:\quad \forall n \succ n_\varepsilon;\quad \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in E} \|f_n(x) - f(x)\|_F \prec \varepsilon.$$

La proposition est ainsi démontrée. ■

Remarques.

1. Dans la preuve du théorème précédent, on n'exige pas de l'espace E qu'il soit de Banach.
2. Il ressort de la preuve du théorème que si une suite $(f_n)_n$ de fonctions de $\left(C_{(E,\ F)},\ \|.\|_\infty\right)$ converge (on dit aussi converge uniformément) vers la fonction f alors, elle converge vers f simplement :
$$\forall x \in E,\ \exists \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$
De plus, f est continue de E dans F.
3. D'après ce qui précède, si un espace de dimention finie est de Banach pour une norme donnée alors, il est de Banach pour toute autre norme (équivalence des normes en dimension finie). En dimension infinie, un espace peut être de Banach pour une norme et ne pas l'être pour une autre norme non équivalente (voir TD).

■

1.6 Théorème du point fixe

Définition 1.6.1 *Soit $(E,\ \|.\|)$ un espace de Banach. Une application $f : E \longrightarrow E$ est dite contractante s'il existe $0 \prec k \prec 1$ vérifiant :*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k.\ \|x - y\|,\qquad \forall x, y \in E \tag{1.27}$$

Proposition 1.6.2 *Une application contractante est toujours continue.*
Preuve. *Pour tout $\varepsilon \succ 0$ et pour tous $x,\ y \in E$:*

$$\|x - y\| \prec \frac{\varepsilon}{k} \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \prec \varepsilon$$

■

Theorème 1.6.3 *(du point fixe) Soient $(E,\ \|.\|)$ un espace de Banach et $f : E \longrightarrow E$ une application contractante alors, l'équation*

$$f(x) = x \tag{1.28}$$

admet une solution unique dans E.
Preuve. *Soit $a \in E$ fixé et considérons dans E la suite $(x_n)_n$, définie par la formule de récurrence :*

$$x_0 = a,\qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

Pour tous naturels $n \prec m$,

$$\|x_n - x_m\| = \|(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \ldots + (x_{m-1} - x_m)\|$$

En utilisant l'inégalité,

$$\|x_n - x_{n+1}\| \leq k^n \|x_0 - x_1\| \qquad \forall n \geq 1$$

on obtient que :

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \left(k^n + k^{n+1} + ... + k^{m-1}\right) \|x_0 - x_1\| = k^n \left(1 + k^1 + ... + k^{m-n-1}\right) \|x_0 - x_1\| \\ &= k^n \frac{\left(1 - k^{m-n}\right)}{1-k} \|x_0 - x_1\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_0 - x_1\| \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{k^n}{1-k} \|x_0 - x_1\| = 0$$

alors,

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ \forall m \geq n \succ N_\varepsilon; \quad \|x_n - x_m\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_0 - x_1\| \prec \varepsilon$$

La suite $(x_n)_n$ est donc de Cauchy et par conséquent admet une limite $x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n$. Montrons que la limite x est l'unique solution de l'équation 1.28. En effet, en vertu de la continuité de f,

$$f(x) = f\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_{n+1} = x$$

D'autre part, si y est une autre solution de l'équation 1.28 alors,

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| \prec \|x - y\|$$

On aboutit donc à une contradiction. Donc, x est l'unique solution de l'équation 1.28. ■

Remarque. Le théorème du point fixe n'est pas spécifique aux espaces de Banach, il reste vrai dans tout espace métrique complet (E, d). Dans ce cas, la condition de contraction 1.27 devient,

$$\exists \ \ 0 \leq k \prec 1: \ \ d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y), \qquad \forall x, y \in E \tag{1.29}$$

■

Chapitre 2

Opérateurs linéaires bornés dans les espaces normés

2.1 Définitions générales

Définition 2.1.1 *Soient X et Y deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. Un opérateur linéaire de X dans Y est une application A définie sur X, à valeurs dans Y et vérifiant,* $\forall x,\ y \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$A(x+y) = A(x) + A(y) \qquad et \qquad A(\lambda \bullet x) = \lambda \bullet A(x) \tag{2.1}$$

Définition 2.1.2 *Soient X et Y deux espaces normés de normes respectives $\|.\|_X$ et $\|.\|_Y$. Un opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ est dit borné si,*

$$\exists M \geq 0 : \quad \forall x \in X; \quad \|A(x)\|_Y \leq M \|x\|_X . \tag{2.2}$$

Exemples. Les opérateurs linéaires suivants sont tous bornés :

1. L'opérateur identité : $Id_X : X \longrightarrow X, \qquad x \longmapsto Id_X(x) = x;$

$$\forall x \in X : \ \|Id_X(x)\| = \|x\|$$

2. L'opérateur nul : $\theta : X \longrightarrow Y, \qquad x \longmapsto \theta(x) = 0_Y$ (*vecteur nul de Y*);

$$\forall x \in X : \ \|\theta(x)\| = \|0_Y\| = 0 = 0. \|x\|_X$$

3. L'homothétie vectorielle de rapport k : $H_k : X \longrightarrow X, \qquad x \longmapsto H_k(x) = k \bullet x;$

$$\forall x \in X : \ \|H_k(x)\| = \|k \bullet x\| = |k| \|x\|$$

4. L'opérateur de décalage (shift) :
$S : l^2(\mathbb{R}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R}), \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \longmapsto A(x) = (0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$

$$\forall x \in l^p(\mathbb{R}) : \ \|S(x)\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (S(x))_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$

■

Proposition 2.1.7 *Si $A : X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire borné alors, il reste borné si on remplace les normes dans X et Y par des normes équivalentes.*

Theorème 2.1.9 *Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est borné ;*
2. *A est continu sur tout l'espace X ;*
3. *A est continu en 0.*

Preuve. *L'implication $(1 \Longrightarrow 2)$, découle du fait qu'un opérateur borné est une application Lypschitzienne donc continue. L'implication $(2 \Longrightarrow 3)$ est évidente. Il suffit de démonter l'implication $(3 \Longrightarrow 1)$. Supposons donc que l'application linéaire A est continue au point 0 de X. On a alors,*

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists \delta_\varepsilon \succ 0 :\ x \in X \quad et \quad \|x\|_X \prec \delta_\varepsilon \Longrightarrow \|A(x) - A(0_X)\|_Y = \|A(x)\|_Y \prec \varepsilon.$$

Soit maintenant $x \in X$ vérifiant $\|x\|_X \neq 0$. Alors,

$$\left\| \frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|_X} \right\|_X = \frac{\delta_\varepsilon}{2} \prec \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left\| A\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y = \frac{\delta_\varepsilon}{2} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} \prec \varepsilon.$$

En d'autres termes,

$$x \in X \quad et \quad \|x\|_X \neq 0 \Longrightarrow \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} \prec \frac{2\varepsilon}{\delta_\varepsilon}$$

Par conséquent,

$$\forall x \in X \ \Longrightarrow \|A(x)\|_Y \prec \frac{2\varepsilon}{\delta_\varepsilon} \|x\|_X .$$

■

2.2 Norme d'un opérateur borné

Soit $A \quad X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné. Posons :

$$\alpha = \sup_{\|x\| = 1} \|A(x)\|_Y , \qquad \beta = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_Y , \qquad \gamma = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}. \tag{2.3}$$

On a les propriétés élémentaires suivantes :

1. Les quantités $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sont toutes finies positives.
2. $\alpha = \beta = \gamma$. En effet, on a
$$\alpha \leq \beta \leq \gamma \quad et \quad \alpha = \gamma.$$
3. Pour tout $M \geq 0$, on a :
$$(\|A(x)\|_Y \leq M \|x\|_X , \qquad \forall x \in X) \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma \leq M.$$
4. $\alpha = \beta = \gamma = \inf \{M \geq 0 :\ \|A(x)\|_Y \leq M \|x\|_X \ ,\ (\forall x \in X)\}$

Définition 2.2.1 *Soit $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné. On appelle norme de l'opérateur A le nombre $\|A\|$, défini par :*

$$\|A\| = \inf \{M \geq 0 :\ \|A(x)\|_Y \leq M \|x\|_X \ ,\ (\forall x \in X)\}$$

Remarque. D'après ce qui précède,

$$\|A\| = \sup_{\|x\| = 1} \|A(x)\|_Y = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_Y = \gamma = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

et l'opérateur A est borné si et seulement si, $\|A\| \prec +\infty$. ■

Exemple 2.2.2 *L'identité, l'opérateur, l'homothétie de rapport k et l'opérateur de décallage (Shift) S, ont pour normes respectives :*

$$\|Id_X\| = 1, \quad \|\theta\| = 0, \quad \|H_k\| = |k|, \quad \|S\| = 1$$

Dans la pratique, trouver la norme d'un opérateur n'est pas aussi direct et aussi simple que ne le laissent penser les exemples cités. Le résultat que nous allons maintenant énoncer est une règle pratique pour le calcul de la norme d'un opérateur borné.

Proposition 2.2.3 *Soient $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné et $M \geq 0$. On suppose que $\|A\| \leq M$ alors, pour avoir $\|A\| = M$, il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*

1. *Il existe $x \in X$ vérifiant,*

$$\|x\| = 1 \quad \text{et} \quad \|A(x)\|_Y = M$$

2. *Il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X, vérifiant :*

$$\|x_n\| = 1 \quad \forall n \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A(x_n)\|_Y = M$$

Preuve. *La première assertion est une conséquence directe de la définition de la norme et du* sup. *Montrons la deuxième. Sous les hypothèses énoncées on a,*

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \ \forall n \succ n_\varepsilon, \quad M - \varepsilon \prec \|A(x_n)\|_Y$$

Il s'ensuit que,

$$\forall \varepsilon \succ 0, \quad \|A\| = \sup_{\|x\| = 1} \|A(x)\| \geq M - \varepsilon$$

En faisant tendre ε vers 0 dans cette dernière inégalité, on obtient : $\|A\| \geq M$. ■

Exemple 2.2.4 *Montrer que l'opérateur suivant est bien défini et trouver sa norme :*

$$A : (\mathcal{C}([0,\ 1],\ \mathbb{R}),\ \|.\|_\infty) \longrightarrow \left(L^2_{[0,\ 1]},\ \|.\|_2\right); \quad Af(x) = xf(x)$$

Solution.

1. *Montrer que l'opérateur A est bien défini signifie qu'il faut montrer l'implication suivante :*

$$f \in \mathcal{C}([0,\ 1], \mathbb{R}) \Longrightarrow A(f) \in L^2_{[0,\ 1]}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Af(x)|^2 dx &= \int_0^1 |xf(x)|^2 dx \leq \int_0^1 x^2 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 x^2 \left(\sup_{x \in [0,\ 1]} |f(x)| \right)^2 dx \\ &= \|f\|_\infty^2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \|f\|_\infty^2 \prec +\infty \end{aligned}$$

Par conséquent, $A(f) \in L^2_{[0,\ 1]}$ et l'opérateur A est donc bien défini.

2. *D'après la formule précédente, l'opérateur A est borné et $\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Montrons qu'en fait, $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Pour cela, considérons la fonction constante $f(x) = 1 \quad \forall x \in [0,\ 1]$. On a :*

$$f \in \mathcal{C}([0,\ 1], \mathbb{R}) \quad et \quad \|f\|_{\infty} = 1$$

De plus,

$$\|A(f)\|_2^2 = \int_0^1 |Af(x)|^2 \, dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

D'après le point 1 de la proposition 2.2.3, on a l'égalité $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

■

Exemple 2.2.5 *Montrer que l'opérateur suivant est bien défini et trouver sa norme :*

$$A : l^2(\mathbb{R}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R}); \quad A(x = x_1,\ x_2, ...,\ x_n, ...) = \left(0,\ \frac{x_2}{2}, ..., \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n, ...\right)$$

Solution.

1. *Pour tout $x = (x_1,\ x_2, ...,\ x_n, ...) \in l^2(\mathbb{R})$,*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |A(x)_k|^2 = \sum_{k=2}^{+\infty} \left| \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_k \right|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 |x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 = \|x\|_2^2$$

Par conséquent, l'opérateur $A(x) \in l^2(\mathbb{R})$ et l'opérateur A est bien défini.

2. *D'après la question précédente, l'opérateur A est borné et $\|A\| \leq 1$. Montrons que $\|A\| = 1$. Pour cela, considérons la suite :*

$$\left(x^{(n)} = \left(\underbrace{0, ..., 0, 1}_{n}, 0, ...\right)\right)_n$$

Il est clair que $\left\|x^{(n)}\right\|_2 = 1 \quad \forall n \geq 1$. De plus,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left\|A\left(x^{(n)}\right)\right\|_2 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left\| \left(\underbrace{0, ..., 0, \left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{n}, 0, ... \right) \right\|_2 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

D'après le point 2 de la proposition 2.2.3, on a l'égalité $\|A\| = 1$.

■

Theoreme 2.2.6 *(Banach Steinhauss) Soit $(E,\ \|.\|_E)$ un espace de Banach et $(F,\ \|.\|_F)$ est un e.v.n et T_n une suite de $\mathcal{L}(E, F)$. Si $\forall f \in E$, $\mathsf{T}_n f$ est borne dans E alors $\mathsf{T}_n f$ est borne sur $\mathcal{L}(E, F)$.*

Theoreme 2.2.6 *(Banach Steinhauss) Soit* $(E, \|.\|_E)$ *un espace de Banach et* $(F, \|.\|_F)$ *est un e.v.n et* T_n *une suite de* $\mathcal{L}(E, F)$*. Si* $\forall f \in E$, $\mathsf{T}_n f$ *est borne dans* E *alors* $\mathsf{T}_n f$ *est borne sur* $\mathcal{L}(E, F)$*.*

Theorème 2.2.7 *Si* Y *est de Banach alors, muni de la norme d'opérateur (formules 2.3 et 2.4), l'espace* $\mathcal{L}(X, Y)$ *est aussi de Banach.*
Preuve. *Soit* $(A_n)_n$ *une suite de Cauchy d'éléments de* $\mathcal{L}(X, Y)$*. Cela signifie que :*

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \forall n,\ m \geq N_\varepsilon,\ \|A_n - A_m\| = \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|A_n(x) - A_m(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right) \prec \varepsilon \tag{2.5}$$

On en déduit que,

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}:\quad \forall n,\ m \succ N_\varepsilon,\quad \|A_n(x) - A_m(x)\|_Y \prec \varepsilon \|x\|_X \qquad \forall x \in X \tag{2.6}$$

La formule 2.6 signifie que pour tout $x \in X$*, la suite* $(A_n(x))_n$ *est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach* Y*. Considérons maintenant l'opérateur,*

$$A : X \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto A(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} A_n(x) \tag{2.7}$$

L'opérateur A *est bien défini (car* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} A_n(x)$ *existe) et il est linéaire. Montrons que la suite* $(A_n)_n$ *converge vers* A *au sens de la norme de* $\mathcal{L}(X, Y)$*. En faisant tendre* m *vers* $+\infty$ *dans la formule 2.6, on obtient :*

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}:\quad n \succ N_\varepsilon \text{ et } x \in X \Longrightarrow \|A_n(x) - A(x)\|_Y = \|(A_n - A)(x)\|_Y \prec \varepsilon \|x\|_X$$

Ce qui signifie que

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}:\quad n \succ N_\varepsilon \ \Longrightarrow \|A_n - A\| \prec \varepsilon \tag{2.8}$$

De plus,

$$x \in X \quad \text{et} \quad n \succ N_\varepsilon \Longrightarrow \|A(x)\|_Y \leq \|(A - A_n)(x)\|_Y + \|A_n(x)\|_Y \leq (\varepsilon + \|A_n\|) \|x\|_X \tag{2.9}$$

Les formules 2.8 et 2.9 signifient que $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *et* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} A_n = A$ *au sens de la norme de* $\mathcal{L}(X, Y)$*.* ■

2.3 Convergence simple, convergence uniforme

Définition 2.3.1 *Soient* X *et* Y *deux* $\mathbb{K}$ *-espaces vectoriels normés. On dit qu'une suite* $(A_n)_n$ *d'éléments de* $\mathcal{L}(X, Y)$ *converge vers* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *:*

1. *fortement si,*
$$\forall x \in X, \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_n(x) - A(x)\|_Y = 0. \tag{2.10}$$
Dans ce cas, on écrit : $A_n \overset{s}{\longrightarrow} A$ *(le symbole s vient du mot anglais "strongly" qui signifie fortement).*
2. *uniformèment si,*
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_n - A\| = 0 \tag{2.11}$$
Dans ce cas, on écrit : $A_n \overset{u}{\longrightarrow} A$ *ou* $A_n \rightrightarrows A$*.*

Remarque.

1. La convergence uniforme d'une suite d'opérateurs bornés est la convergence dans l'espace $\mathcal{L}(X, Y)$.

2.
$$\left(A_n \xrightarrow{u} A\right) \Longrightarrow \left(A_n \xrightarrow{s} A\right)$$

En effet, puisque pour tout n, l'opérateur $A_n - A$ est un élément de $\mathcal{L}(X,Y)$ alors,

$$0 \leq \|A_n(x) - A(x)\|_Y \leq \|A_n - A\| \, \|x\|_X \qquad \forall x \in X$$

D'où, par passage à la limite,

$$0 \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_n(x) - A(x)\|_Y \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_n - A\| \, \|x\|_X = 0 \qquad \forall x \in X$$

3. Il existe des suites fortement convergentes mais qui ne convergent pas uniformément. Soit $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ une base Hilbertienne de l'espace $l^2(\mathbb{R})$. Considérons dans cet espace, la suite d'oprateurs :

$$P_n : l^2(\mathbb{R}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R}); \qquad x = \sum_{k=1}^{+\infty} \prec x, \ e_k \succ e_k \ \longmapsto P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \prec x, \ e_k \succ e_k.$$

Pour tout x dans $l^2(\mathbb{R})$,

$$\|P_n(x) - x\|_2^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \prec x, \ e_k \succ e_k \right\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\prec x, \ e_k \succ|^2$$

Cette quantité est le reste de la série convergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} |\prec x, \ e_k \succ|^2 = \|x\|_2^2$. Elle converge donc vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|(P_n - Id)(x)\|_2 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|P_n(x) - x\|_2 = \sqrt{\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\prec x, \ e_k \succ|^2} = 0 \quad \forall x \in l^2(\mathbb{R})$$

Donc, $P_n \xrightarrow{s} Id$. Montrons qu'on n'a pas cependant la convergence uniforme. En effet, pour tout naturel $n \geq 1$, posons $x_n = e_1 + ... + e_n + e_{n+1}$. Alors,

$$\|(P_n - Id)(x_n)\|_2 = \|P_n(x_n) - x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\prec e_{n+1}, \ e_k \succ|^2} = 1$$

D'où, $\|P_n - Id\|_2 \geq 1$ pour tout naturel $n \geq 1$. Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|P_n - Id\|_2 \geq 1$ et on n'a donc pas $P_n \rightrightarrows Id$.

4.
$$(A_n \rightrightarrows A) \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_n\| = \|A\|$$

Cela découle directement de l'inégalité

$$\left| \|A_n\| - \|A\| \right| \leq \|A_n\| = \|A_n - A\|$$

Comme le montre l'exemple précédent, l'inverse n'est pas vrai. En effet, on n'a pas $P_n \rightrightarrows Id$ mais,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|P_n\| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (1) = 1 = \|Id\|$$

■

2.4 Théorème de Banach sur l'opérateur inverse

Définition 2.4.1 *Soient* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces normés. Une application* $A : X \longrightarrow Y$ *est dite ouverte si l'image de tout ouvert de* X *est un ouvert de* Y.

Remarques.

1. Tout homéomorphisme de X dans Y est une application ouverte.
2. Une application constante de X dans Y ne peut être ouverte car, l'image de tout sous-ensemble de X est un singleton donc fermé de Y.

■

Pour les éléments de $\mathcal{L}(X, Y)$, on a le résultat très utile suivant (nous admettrons ce résultat sans démonstration).

Theorème 2.4.2 *(de l'application ouverte) Soient* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces de Banach. Alors, tout élément surjectif* A *de* $\mathcal{L}(X, Y)$ *est une application ouverte.*

Définition 2.4.3 *Soient* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces normés. On appelle isomorphisme entre* X *et* Y *tout opérateur* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *inversible et à inverse borné de* Y *dans* X.

Notation 2.4.4 *L'ensemble des isomorphismes entre* X *et* Y *est noté* $Iso(X, Y)$. *Ainsi,*

$$A \in Iso(X, Y) \Longleftrightarrow \begin{cases} A \text{ bijection entre } X \text{ et } Y \\ A \in \mathcal{L}(X, Y) \\ A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X) \end{cases} \tag{2.12}$$

Si $X = Y$, *on écrit* $Iso(X)$ *au lieu de* $Iso(X, X)$.

Theorème 2.4.5 *(de l'isomorphisme de Banach) Soient* $(X, \|.\|_X)$ *et* $(Y, \|.\|_Y)$ *deux espaces de Banach et* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Alors,*

$$A \text{ bijection entre } X \text{ et } Y \Longrightarrow A \in Iso(X, Y)$$

Preuve. Notons tout d'abord que ce théorème signifie tout simplement que l'inverse d'un opérateur linéaire borné et bijectif est aussi un opérateur linéaire borné. Pour la preuve, il suffit de remarquer que d'après le théorème de l'application ouverte,

$$\begin{aligned} A \text{ linéaire, bornée et bijective } &\Longrightarrow A \text{ linéaire, bornée et surjective} \\ &\Longrightarrow A \text{ linéaire, bornée et l'image par } A \text{ de tout ouvert de } X \text{ est un ouvert de } Y \\ &\Longrightarrow \text{l'image par } \left(A^{-1}\right)^{-1} = A \text{ de tout ouvert de } X \text{ est un ouvert de } Y \\ &\Longrightarrow \text{l'application } A^{-1} \text{ est continue de } Y \text{ dans } X \\ &\Longrightarrow A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X). \end{aligned}$$

■

Theorème 2.4.6 *Si X et Y sont de Banach alors, l'ensemble $Iso\left(X,\ Y\right)$ est un ouvert de $\mathcal{L}\left(X,Y\right)$.*

Preuve. *Pour établir ce résultat, nous allons montrer que pour tout $A \in Iso\left(X,\ Y\right)$, la boule ouverte $B_O\left(A,\ \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$ est entièrement incluse dans $Iso\left(X,\ Y\right)$. Cela revient à montrer que :*

$$B \in \mathcal{L}\left(X,Y\right) \quad \text{ et } \quad \|B\| \prec \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Longrightarrow A+B \in Iso\left(X,\ Y\right)$$

Pour tout $y \in Y$ (fixé), considérons l'application :

$$C_y : X \longrightarrow X, \quad x \longmapsto C_y\left(x\right) = A^{-1}\left(y\right) - A^{-1}B\left(x\right) \tag{2.13}$$

Pour tous $x_1,\ x_2 \in X$,

$$\left\|C_y\left(x_1\right) - C_y\left(x_2\right)\right\| = \left\|A^{-1}B\left(x_2\right) - A^{-1}B\left(x_1\right)\right\| = \left\|A^{-1}B\left(x_1 - x_2\right)\right\| \leq \left\|A^{-1}B\right\| \left\|x_1 - x_2\right\|$$

On a par hypothèse,

$$k = \left\|A^{-1}B\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|B\| \prec \left\|A^{-1}\right\| . \frac{1}{\|A^{-1}\|} = 1.$$

L'application C_y est donc k -lypschitzienne avec $k \prec 1$. D'après le théorème du point fixe, il existe un unique $x \in X$ tel que $C_y\left(x\right) = x$.
On en déduit que,

$$\forall y \in Y,\ \exists! x \in X : A^{-1}\left(y\right) - A^{-1}B\left(x\right) = x$$

ou sous forme équivalente,

$$\forall y \in Y,\ \exists! x \in X : y = A\left(x\right) + B\left(x\right) = \left(A+B\right)\left(x\right) \tag{2.14}$$

Ainsi donc, l'opérateur $A+B$ est défini sur tout X, borné et inversible. D'après le théorème sur l'opérateur inverse, l'opérateur $\left(A+B\right)^{-1}$ est aussi borné d'où, $A+B \in Iso\left(X,\ Y\right)$. ■

2.5 Théorème de Hahn-Banach

Ce que nous exposons dans cette partie, n'est pas le tbéorème de Hahn-Banach sous toutes ses formes mais ses conséquences les plus simples et non moins utiles. Le théorème en lui - même (démonstration et différentes applications fait partie du cours "d'analyse fonctionnelle 1" du niveau Master 1. Rappelons que come auparavant, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou complexes.

Theorème 2.5.1 *(de Hahn - Banach) Soient $\left(X,\ \|.\|\right)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et X_0 un sous-espace vectoriel de X. Soit $f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonctionnelle linéaire bornée. Alors, il existe une fonctionnelle linéaire bornée $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que : $\|f\| = \|f_0\|$ et $f\left(x\right) = f_0\left(x\right)$ pour tout $x \in X_0$.*

Remarque. La fonctionnelle linéaire f est appelée prolongement de f_0 avec conservation de la norme. ■

Exemple 2.5.2 *Dans l'espace $\left(\mathbb{R}^2,\ \|.\|_2\right)$, considérons le sous-espace X_0 défini par :*

$$X_0 = \left\{\left(x,\ y\right) \in \mathbb{R}^2 :\ x - y = 0\right\}$$

et définissons dans ce sous-espace l'application :

$$f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left(x,\ y\right) \longmapsto f\left(x,\ y\right) = 2x$$

On cherche f sous la forme :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = ax + by$$

On a,

$$\begin{cases} \|f\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ et \\ f(x, x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \|f\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ et \\ (a + b)\, x = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \|f\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ et \\ a + b = 2 \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} b = 2 - a \\ et \\ \|f\|^2 = a^2 + (2 - a)^2 = 2a^2 - 4a + 4 = F(a) \end{cases}$$

On détermine a à partir de la relation $F'(a) = 0$, ce qui nous donne $a = b = 1$. ¨Par conséquent,

$$f(x, y) = x + y, \quad f(x, x) = 2x \qquad et \quad \|f_0\| \leq \|f\| = \sqrt{2}$$

Il reste à vérifie qu'il existe bien $(x, x) \in X_0$ tel que : $|f_0(x, x)| = \sqrt{2}$. Il suffit pour cela de prendre $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exemple 2.5.3 *Dans l'espace $\left(\mathbb{R}^2, \ \|.\|_2\right)$, considérons le sous-espace X_0 défini par :*

$$X_0 = \left\{(x, \ y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - y = 0\right\}$$

et définissons dans ce sous-espace l'application :

$$f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, \ y) \longmapsto f(x, \ y) = -x$$

On cherche f sous la forme :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = ax + by$$

On a,

$$\begin{cases} \|f\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ et \\ f(x, x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \|f\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ et \\ (a + b)\, x = -x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \|f\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ et \\ a + b = -1 \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} b = -1 - a \\ et \\ \|f\|^2 = a^2 + (1 + a)^2 = 2a^2 + 2a + 1 = F(a) \end{cases}$$

Par conséquent,

$$F'(a) = 0 \Longrightarrow 4a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{1}{2} = b \Longrightarrow f(x, y) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$$

On vérifie que

$$f(x, x) = -x, \qquad \|f_0\| \leq \|f\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ,$$

De plus,

$$\left\|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\|_2 = 1 \qquad et \qquad \left|f_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemple 2.5.4 *Dans l'espace* $\left(\mathbb{R}^3,\ \|.\|_2\right)$*, considérons le sous-espace* X_0 *défini par :*

$$X_0 \ = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y - z = 0\right\}$$

et définissons dans ce sous-espace l'application :

$$f_0 : X_0 \ \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,\ y,\ z) \longmapsto f\,(x,\ y,\ z) = 2x$$

On cherche f *sous la forme :*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f\,(x, y, z) = ax + by + cz$$

On a,

$$\left\{\begin{array}{c} \|f\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ et \\ f\,(x, y, x+y) = 2x \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \|f\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ et \\ (a + c - 2)\,x + (b + c)\,y = 0 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} \|f\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ et \\ (a + c - 2) = (b + c) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \|f\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ a = 2 - c \\ b = -c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} a = 2 - c \\ b = -c \\ \|f\|^2 = 3c^2 - 4c + 4 \ = F\,(c) \end{array}\right.$$

Par ailleurs,

$$F'\,(c) = 0 \Longrightarrow c = \frac{2}{3}, \quad a = \frac{4}{3}, \quad b = -\frac{2}{3} \Longrightarrow f\,(x, y, z) = \frac{4x - 2y + 2z}{3}$$

On vérifie que :

$$f\,(x, y, x+y) = 2x \qquad et \qquad \|f_0\| \leq \|f\| = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

On cherche maintenant l'élément $(x, y, x+y) \in X_0$ *qui vérifie :*

$$x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 1 \qquad et \qquad |f_0\,(x, y, x+y)| = \|f\| = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

On doit résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{c} 2\,|x| = \sqrt{\frac{8}{3}} \\ \\ 2y^2 + 2xy + \left(2x^2 - 1\right) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} |x| = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \\ 2y^2 + 2xy + \left(2x^2 - 1\right) = 0 \end{array}\right.$$

On vérifie facilement que ce système admet des solutions. Par exemple,

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \Longrightarrow 2y^2 + y\sqrt{\frac{8}{3}} + \frac{1}{3} = 0$$

On a ainsi une équation du second degré en y *dont le discriminant* $\Delta = \left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2 - 4\left(2.\frac{1}{3}\right) = 0.$ *Elle admet donc une solution double.*

Remarque. L'exemple précédent montre que le prolongement répondant aux conditions de Hahn - Banach peut ne pas être unique. ■

Chapitre 3

Opérateurs Compacts

3.1 Définitions de Bases

1) Diamètre d'un ensemble (ou bien d'un espace) est le plus grand distance entre deux éléments dans cet ensemble (ou cet espace) c-à-d

$$\begin{aligned} diam\,(E) &= \max\left\{d\left(x,y\right),\ x,y\in E\right\}, \\ &= \max\left\{\|x-y\|_E\,,\ x,y\in E\right\}. \end{aligned}$$

2) Soit E, F deux ensembles, on dit que E est dense dans F si $\bar{E}=F$. (ex : $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, puisque $\overline{\mathbb{Q}^n}=\mathbb{R}^n$).

3) Un ensemble E est dite séparable s'il existe un sous-ensemble dense et de plus dénombrable.

4) E un e.v.n est dite séparé si pour chaque $x,y\in E$, il existe $r_1,r_2>0$ tels que

$$B\left(x,r_1\right)\cap B\left(y,r_2\right)=\emptyset.$$

5) Un ensemble E est dite borné si le diamètre de cet ensemble est fini $diam\,(E)<+\infty$.

6) Soit $E_{\|\cdot\|}$ un e.v.n, $A\subset E$ est dite fermé s'il est complet par rapport à la norme $\|\cdot\|_E$.

7) Soit $E_{\|\cdot\|}$ un e.v.n, la boule unité ouverte de E est

$$B_E\left(0,1\right)=\left\{x\in E,\ \ \|x\|_E<1\right\}.$$

8) Soit $E_{\|\cdot\|}$ un e.v.n, la boule unité fermée de E est

$$\overline{B_E\left(0,1\right)}=\left\{x\in E,\ \ \|x\|_E\leq 1\right\}.$$

3.2 Les Compacts

Définition 3.2.1 *Soit E un e.v. et $A \subset E$. Un recouverement de A est une famille $(U_i)_{i\in I}$ de parties de E vérifiant*

$$A \subset \bigcup_{i\in E} U_i,\ I\ qcq.$$

Remarque 3.2.1 *Un sous-recouverement ou bien un recouverement fini est une partie $\{U_i,\ i \in J\}$ où $J \subset I$ fini.*

Définition 3.2.2 *On dit qu'un espace E est compact si de tout recouverement par les ouverts de E, on peut extraire un recouverement fini.*

Exemple 3.2.1 $\mathbb{R}$ *n'est pas un compact car : $A_n =]-n, n[$, $n \in \mathbb{N}$ est un recouverement ouvert de $\mathbb{R}$, mais tout sous-recouverement est de la forme $\{]-n_1, n_1[,]-n_2, n_2[, \ldots,]-n_p, n_p[\}$ dont la réunion est $]-N, N[$, où $N = \max\limits_{1\leq i\leq p} n_i$, et $\mathbb{R} \not\subseteq]-N, N[$.*

Théorème 3.2.1 (Hein-Borel-Lebesque) *Tout fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ est un compact.*

Exemple 3.2.2 *Tout intervale $[a, b]$ fermé et borné de $\mathbb{R}$ est compact, $]a, b]$ n'est pas un compact.*

Remarque 3.2.2

1) *Soit $E_{\|\cdot\|}$ est e.v.n compact $\Rightarrow E_{\|\cdot\|}$ est borné et complet.*
2) *Soit $E_{\|\cdot\|}$ est e.v.n compact $\Rightarrow E_{\|\cdot\|}$ est séparable.*
3) *Soit $E_{\|\cdot\|}$ est e.v.n compact et $\|\cdot\|_*$ une norme équivalente à $\|\cdot\|_E$ sur $E \Rightarrow E_{\|\cdot\|_*}$ est compact.*
4) *Soit $E_{\|\cdot\|}$ est e.v.n et $A \subset E$ est une partie compacte de $E \Rightarrow A_{\|\cdot\|_E}$ est borné et fermé dans E.*

Définition 3.2.3 *Un e.v.n E est dite localement compact s'il est sépéré et si chacun de ses points admet un voisinage compact.*

Exemple 3.2.3 $\mathbb{R}$ *est localement compact.*

Définition 3.2.4 *Un e.v.n E est dite relativement compact s'il est totalement borné, c-à-d. $\bar{E}$ est un compact.*

Exemple 3.2.4 *Tout les intervals ouverts bornés dans $\mathbb{R}$ sont relativements compacts.*

3.3 Applications Linéaires Compactes

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire d'un e.v.n E dans un e.v.n F, on dit que $\mathcal{A}$ est un opérateur compact s'il envoie par continuité tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $\mathcal{A}(G)$ dans F. Autrement dit, la fermeteur $\overline{\mathcal{A}(G)}$ est compacte.

Définition 3.3.5 *Soient E et F deux espaces de Banach, une application linéaire continue $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E, F)$ est dite compacte si l'image par l'application $\mathcal{T}$ de la boule unité fermée $\bar{B}_E$ de l'espace E (c-à-d $\mathcal{T}\left(\bar{B}_E\right)$) est relativement compacte (en norme) dans F.*
L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ des applications linéaires compactes de E dans F. On pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Proposition 3.3.1 *Soient E et F deux espaces de Banach, l'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$. Soient E, F et G des espaces de Banach, $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(F, G)$, si $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{T}$ est compacte alors $\mathcal{T}\mathcal{S}$ est compacte. ($\mathcal{T}\mathcal{S} \in \mathcal{L}(E, G)$)*

Remarque 3.3.3 *Il est clair que tout opérateur $\mathcal{T}$ de rang fini est compact.*

Théorème 3.3.2 *Une combinaison linéaire $\mathcal{A} = \alpha\mathcal{A}_1 + \beta\mathcal{A}_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Théorème 3.3.3 *L'opérateurs identique $Id(x)$ de E dans F est compact si et seulement si E est de dimension finie.*

Théorème 3.3.4 (Image continue d'un compact) *Soit E un e.v.n compact, et soit F un e.v.n. Si $f : E \longrightarrow F$ est continue, alors $f(E)$ est un compact de F.*

Théorème 3.3.5 (Uniformément continue) *Soient E et F deux e.v.n. Si E est compact, alors tout application continue $f : E \longrightarrow F$ est uniformément continue.*

Définition 3.3.6 (Partie équicontinue) *Soient E un espace de Banach et F un e.v.n. $\Omega \subset C(E, F)$. On dite que Ω est une partie équicontinue SSI:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \textit{tel que}\ \forall t_1, t_2 \in E,\ \forall \mathcal{A} \in \Omega,\ \ \|t_1 - t_2\|_E < \delta \Rightarrow \|\mathcal{A}(t_1) - \mathcal{A}(t_2)\|_F < \varepsilon.$$

Théorème 3.3.6 (Ascoli-Arzelà) *Soient E un espace compact et F un e.v.n. $\Omega \subset E$ est un sous-ensemble non vide borné, si $\mathcal{A}(\Omega)$ est équiconinue, borné dans $C(E, F)$, alors $\mathcal{A}(\Omega)$ est relativement compact.*

Définition 3.3.7 (Complètement continue) *Soient E un e.v.n. On dit que $\mathcal{A} : E \longrightarrow E$ est complètement continue si pour tout borné $\Omega \subset E$, l'ensemble $\mathcal{A}(\Omega)$ est relativement compact.*

Chapitre 4

Exercices

Nous avons utiliser plusieurs d'exercice dans ce cours comme des exemples présentés pour montrer l'utilité de nos résultats principaux.

4.1 Pour le Chapitre 2

Exercice 4.1.1 *Soit* $E = C([0,2], \mathbb{R})$ *un espace vectoriel normé et son norme* $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leq x\leq 2} |f(x)|$. *On définit les opérateurs* $\mathcal{T}$ *et* $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *comme suit:*

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathcal{T}:(E,\|\cdot\|_\infty) & \to & (\mathbb{R},|\cdot|), & \vdots\ \vdots & \mathcal{A}_n:(E,\|\cdot\|_\infty) & \to & (\mathbb{R},|\cdot|), \\ f & \to & \int\limits_0^x f(t)\,dt, & \vdots\ \vdots & f & \to & n^2\int\limits_0^{\frac{x}{n}} tf(t)\,dt,\ n\in\mathbb{N}^*. \end{array}$$

Les opérateurs $\mathcal{T}$ *et* $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont linéaires? bornés? continues?*

Exercice 4.1.2 (Banach-Steinhauss) *Soit* $E = C([1,e], \mathbb{R})$ *un espace vectoriel normé et son norme* $\|f\|_\infty = \sup\limits_{1\leq x\leq e} |f(x)|$. *On définit l'opérateur* $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *comme suit:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_n:(E,\|\cdot\|_\infty) & \to & (\mathbb{R},|\cdot|), \\ f & \to & \left(e-\frac{x}{n}\right)f(x)+\int\limits_1^x \ln(t)\,f(t)\,dt. \end{array}$$

Montrer que tous les eléments de l'opérateur $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est dans un espace de Banach.*

Exercice 4.1.3 (Norme d'un dual topologique) *Soit :*

$$E = \left\{f\in\ \mathcal{L}(\mathbb{R})\,;\ \textit{tel que}\ \left(1+x^2\right)|f(x)| < +\infty\right\}.$$

On définie sur cette espace l'application suivante $\|f\|_* = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left(1+x^2\right)|f(x)|$, *et l'opérateur*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} : (E, \|\cdot\|_*) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|), \\ f & \to & \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx. \end{array}$$

1) *Vérifier que* $(E, \|\cdot\|_*)$ *est un espace vectoriel normé.*

2) *Montrer que* $\mathcal{T}$ *est borné dans* E' *et calculer sa norme.*

Exercice 4.1.4 (Monomorphisme; Application ouverte) *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{R}, |\cdot|) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|), \\ x & \to & \frac{1}{2}x+5. \end{array}$$

1. *Montrer que* f *est bijective.*

2. *Montre que* $g(x) = f(x) - 5$ *est un monomorphisme.*

3. *Est-ce-que* g *est une application ouverte?*

Exercice 4.1.5 (Isomorphisme) *Soit*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} : \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right) & \to & \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right), \\ (x,y) & \to & (x+y, x-y). \end{array}$$

Montrer que $\mathcal{T}$ *est un isomorphsme.*

4.2 Pour le Chapitre 3

Exercice 4.2.6 *Soit* $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *l'espace des applications continues de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$, *muni de la norme uniforme* $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$. *On définit l'opérateur :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} : \quad (E, \|\cdot\|_\infty) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|), \\ f & \to & \int\limits_0^x tf(t)\,dt. \end{array}$$

Montrer que $\mathcal{T}$ *est un opérateur compact par deux méthodes.*

Exercice 4.2.7 *Soit* $E = L^2(\mathbb{R})$ *l'espace des applications carrées intégrables sur* $\mathbb{R}$, *muni de la norme*

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit l'opérateur :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}: & (E, \|\cdot\|_{L^2}) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|), \\ & f & \to & \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{\sqrt{t^2+1}} dt. \end{array}$$

Montrer que $\mathcal{T}$ *est un opérateur compact.*

Exercice 4.2.8 *Soit* $E = L^p\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \mathbb{R}\right)$ *l'espace des applications dont la puissance d'exposant* $p > 1$ *est intégrable dans* $\mathbb{R}$*, muni de la norme*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit $q > 1$*, tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. En utilisant le théorème d'Ascoli-Arzelà, montrer que l'opérateur :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}: (E \quad, \|\cdot\|_{L^p}) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|), \\ f & \to & \int\limits_0^{x} \sin(t) \cos^{\frac{1}{q}}(t) \, f(t) \, dt. \end{array}$$

est compact.

La même question pour l'opérateur :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}: (E \quad, \|\cdot\|_{L^p}) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|), \\ f & \to & (q+1)^{\frac{1}{q}} \int\limits_0^{x} \ln(g(t)) \, g^{-\frac{1}{q}}(t) \, f(t) \, [g'(t)]^{\frac{1}{q}} \, dt, \end{array}$$

tel que $g(t)$ *est une fonction positive continue croissante et* $g(0) = 1$, $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = e$.

Bibliographie

[1] Brézis H., Analyse fonctionnelle, Masson 1993.

[2] Dieudonné, Eléments d'analyse, tome 2, Gauthier - Villars 1974.

[3] Gourdon, Analyse, Ellipses 1994.

[4] Gonnord et Tosel, Topologie et analyse fonctionnelle, Ellipses 1996.

[5] Hengartner W., Lambert M., Reischer C. Introduction à l'analyse fonctionnelle, Les presses de l'université du Québec.

[6] Kolmogorov A., Fomine S.. Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Edition "MIR", Moscow, 1974 (traduit de la langue russe).

[7] Lang, Analyse réelle, InterEditions 1977.

[8] Moison et Vernotte, Topologie et séries, Ellipses1991.

[9] Eléments d'analyse pour l'agrégation, Masson 1995.

[10] Schwartz L. Topologie générale et analyse fonctionelle. Edit. Hermann.

[11] Yosida K. Functional Analysis, Springer-Verlag 6^{th} edition, 1980.

[12] Hengartner W., Lambert M., Reischer C. Introduction à l'analyse fonctionnelle, Les presses de l'université du Québec.

[13] Kolmogorov A., Fomine S.. Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Edition "MIR", Moscow, 1974 (traduit de la langue russe).

[14] Schwartz L. Topologie générale et analyse fonctionelle. Edit. Hermann.

[15] Yosida K. Functional Analysis, Springer-Verlag 6^{th} edition, 1980.