الدرس الخامس

les lois de la probabilité discrets: القوانين الاحتمالية المتقطعة

1- القانون المنتظم : (أحادي الشكل): la loi uniforme

ليكن $N \in N$ (عدد طبيعي) مع أن $N \geq 1$ ، نقول أن المتغير العشوائي X يتبع قانون أحادي الشكل في المجموعة :

$$X(\Omega)=\{1.2.3 \ldots . N\}$$

إذا كان من أجل كل X $\quad 1 \leq X \leq N$ فإن :

$$P(X = x) = 1/N$$

ولهذا سمي بقانون أحادي الشكل يعني إحتمال كل قيمة من قيم المجموعة التي ينتمي إليها المتغير العشوائي Xهي قيمة ثابتة وهي $1/N$.

***الأمل الرياضي:**

$$\mathrm{E(x)} = \frac{N + 1}{2}$$

*** التباين :**

$$\mathrm{V(x)} = \frac{\mathrm{N}^2 - 1}{12}$$

مثال:

نرمي زهرة نرد متزنة نعرف المتغير العشوائي X على أنه رقم الوجه الظاهر ، $X(\Omega)=\{1.2.3 \ldots 6\}$

$$P(X = x) = 1/6$$

إحتمال أي قيمة من قيم المجموعة ثابت ويساوي 6/1

الأمل الرياضي :

$$\mathrm{E(x)} = \frac{6 + 1}{2} = 7/2$$

التباين:

$$\mathrm{V(x)} = \frac{\mathrm{N}^2 - 1}{12} = \frac{6^2 - 1}{12} = 35/12$$

2- قانون برنولي : la loi Bernoulli

تجربة برنولي: وهي التجربة التي تحتمل نتيجتين بمعنى ان المجموعة الأساسية Ω تحتوي على حادثتين عشوائيتين فقط وهي النجاح succès و الفشل échec حيث إحتمال النجاح هو p واحتمال الخسارة أو الفشل هو 1-p=q
ويعرف قانون برنولي بالعلاقة التالية:

$$P(X = x) = p^x . (1 - p)^{1-x}$$

حيث المتغير x لا يأخذ إلا القيمتين 0 و 1 ، فكما اشرنا في تعريف التجربة فإن احتمال النجاح حسب هذه العلاقة:

$$P(X = 1) = p^1 . (1 - p)^{1-0} = p$$

واحتمال الفشل حسب هذه العلاقة:

$$P(X = 0) = p^0 . (1 - p)^{1-0} = 1 - p = q$$

لتكن لدينا قطعة نقد مغشوشة بحيث يكون الحصول على الكتابة p هي ¾ و احتمال حصول على الوجه طبعا هو ¼

الأمل الرياضي:

$$E(x) = p$$

* **التباين :**

$$V(x) = p.q$$

مثال:

لتكن لدينا قطعة نقد مغشوشة بحيث يكون الحصول على الكتابة p هي ¾ و احتمال الحصول على الوجه طبعا هو ¼ ، إذا إعتبرنا الحادثة A هي الحصول على الوجه فغن احتمال النجاح هو:

$$P(X = 1) = p^1.(1 - p)^{1-0} = p = 1/4$$

الأمل الرياضي :

$$E(x) = P = 1/4$$

التباين:

$$V(x) = p.q = \frac{1}{4} * \frac{3}{4} = 3/16$$

3- قانون ببينوميال (ثنائي الحد): la loi binomiale

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع قانون بينوميال $\beta(n.p)$ $x \rightarrow$ ، إذا كان قانون إحتماله العلاقة التالية:

$$P(X = x) = C_n^x p^x.(1 - p)^{n-x}$$

حيث : n هو عدد مرات إجراء التجربة أو ما يعرف كذلك بعدد مرات السحب.

X هو المتغير العشوائي .

p هو إحتمال النجاح واحتمال الخسارة أو الفشل هو 1-p=q

***الأمل الرياضي:**

$$E(x) = n.p$$

* **التباين :**

$$V(x) = n.p.q$$

شروط تطبيق قانون بينوميال :

1- نتيجة كل محاولة للتجربة أحد النتيجتين إما نجاح أو إما الفشل.
2- إحتمال النجاح في كل محاولة ثابت وهو p .
3- تجرى التجربة عددا معينا من المرات وهو n.

ملاحظة: إذا كان n=1 (أي تجرى مرة واحدة) فإن هذه التجربة هي تجربة **برنولي.**

مثال:

ليكن لدينا صندوق يحتوي على 5كريات بيضاء و 3 كريات سوداء ، نسحب بالارجاع كرية واحدة 3 مرات

س1: ماهو احتمال ان تكون كل الكريات الثلاثة المسحوبة بيضاء ، س2 : ماهو احتمال الحصول على كرية واحدة بيضاء من بين الكريات الثلاثة المسحوبة.

الحل:

الملاحظ في هذا المثال هو تحقق شروط تطبيق قانون بينوميال، فنرى بالنسبة للشرط الاول أن نتيجة كل محاولة سحب هو اما ان تكون بيضاء أو ليست بيضاء ، وبالنسبة للشرط الثاني احتمال سحب كرية بيضاء في كل محاولة هو عدد ثابت $p = 5/8$ (أي نسبة النجاح ثابتة طبعا لان السحب بالارجاع).، والشرط الثالث عدد المحاولات هو عدد مرات السحب وهو n=3 ،(لو كان السحب مرة واحدة تسمى هذه اللتجربة بتجربة برلوني اي أن قانون برنولي هو نفسه قانون بينوميال لما n=1).

بالنسبة للسؤال الاول :

نستعمل الطريقة الاولى:

إذا اعتبرنا أن : A_1 حادثة سحب كرية بيضاء في السحب الأول ، A_2 حادثة سحب كرية بيضاء في السحب الثاني A_3 حادثة سحب كرية بيضاء في السحب الثالث.

فالاجابةعن السؤال هو حساب احتمال ان تكون الاولى بيضاء والثانية والثالثة كذلك بيضاء ، ونستعمل قانون الاحتمالات المركبة :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) * p(A_2/A_1) * \ p(A_3/A_1 \cap A_2)$$

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{5}{8} * \frac{5}{8} * \frac{5}{8} = (5/8)^3$$

نستعمل الطريقة الثانية: هوتطبيق قانون بينوميال مادام أن الشروط محققة.

إذا إعتبرنا أن المتغير العشوائي xهو عدد الكريات البيضاء المسحوبة (السؤال أوالنجاح متعلق باللون الابيض)

$$\mathrm{P(X = x) = C_n^x p^x . (1 - p)^{n-x}}$$

$$\mathrm{P(X = 3) = C_3^3 (5/8)^x . (1 - 5/8)^{3-3}}$$
$$\mathrm{P(X = 3) = (5/8)^3}$$

وهي نفس نتيجة الطريقة الأولى.

بالنسبة للسؤال الثاني :

$$\mathrm{P(X = 1) = C_3^1 (5/8)^1 . (1 - 5/8)^{3-2}}$$
$$\mathrm{P(X = 1) = C_3^1 (5/8)^1 . (3/8)^1}$$

***الأمل الرياضي:**

$$\mathrm{E(x)} = n.\mathrm{p = 3 * (5/8) = 15/8}$$

قلنا سابقا ان الأمل الرياضي هو التوقع أي ان عدد الكريات البيضاء المتوقع الحصول عليها هو 15/8 كرية بيضاء.

* **التباين :**

$$V(x) = n.p.q = 3.(5/8).(1 - 5/8)$$

4- قانون فوق الهندسي (الهندسي الزائد): la loi hypergéométrique

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع قانون فوق الهندسي إذا كان قانون إحتماله العلاقة التالية:

$$P(X = x) = \frac{C_m^x . C_{N-m}^{n-x}}{C_N^n}$$

حيث : n هو عدد مرات إجراء التجربة أو ما يعرف كذلك بعدد مرات السحب.

X هو المتغير العشوائي .

m هو عدد النجاحات قبل التجربة أو قبل السحب.

N هو حجم العينة المسحوبة (طبعا السحب بدون ارجاع).

***الأمل الرياضي:**

$$E(x) = n.p$$

* **التباين :**

$$V(x) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) n.p.q$$

مثال:(نستعمل نفس المثال السابق ولكن هذه المرة السحب بدون ارجاع)

ليكن لدينا صندوق يحتوي على 5كريات بيضاء و 3 كريات سوداء ، نسحب بدون ارجاع كرية واحدة 3 مرات س1: ماهو احتمال ان تكون كل الكريات الثلاثة المسحوبة بيضاء ، س2 : ماهو احتمال الحصول على كرية واحدة بيضاء من بين الكريات الثلاثة المسحوبة.

الحل:

الملاحظ في هذا المثال هو أن السحب بدون إرجاع.

بالنسبة للسؤال الاول :

نستعمل الطريقة الاولى:

إذا اعتبرنا أن : A_1 حادثة سحب كرية بيضاء في السحب الأول ، A_2 حادثة سحب كرية بيضاء في السحب الثاني A_3 حادثة سحب كرية بيضاء في السحب الثالث.

فالاجابةعن السؤال هو حساب احتمال ان تكون الاولى بيضاء والثانية والثالثة كذلك بيضاء ، ونستعمل قانون الاحتمالات المركبة :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) * p(A_2/A_1) * \; p(A_3/A_1 \cap A_2)$$

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{5}{8} * \frac{4}{7} * \frac{3}{6}$$

نستعمل الطريقة الثانية: هوتطبيق قانون فوق الهندسي.
إذا إعتبرنا أن المتغير العشوائي xهو عدد الكريات البيضاء المسحوبة (السؤال أوالنجاح متعلق باللون الابيض)
حيث : n هو عدد مرات السحب.n=3
X هو المتغير العشوائي .
m هو عدد النجاحات قبل التجربة أو قبل السحب. m=5
N هو حجم العينة المسحوبة (طبعا السحب بدون ارجاع). N=8

$$P(X=3)=\frac{C_5^3 . C_{8-5}^{3-3}}{C_8^3}$$

$$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{8}*\frac{4}{7}*\frac{3}{6}$$

وهي نفس نتيجة الطريقة الأولى.

<u>*الأمل الرياضي:</u>

$$E(x)=n.p=3*(5/8)=15/8$$

<u>* التباين :</u>

$$V(x)=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)n.p.q=\left(\frac{5}{7}\right)3.\left(\frac{5}{8}\right).\left(1-\frac{5}{8}\right)$$

5- <u>قانون بواسن</u> la loi poisson

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع قانون بواسن $P(m)$ → x إذا كان قانون إحتماله العلاقة التالية:

$$P(X=x)=\frac{e^{-m}.m^{x}}{m!}$$

حيث: $m\in R^{*+}$ عدد موجب يختلف عن الصفر.
يستعمل هذا القانون في التجارب التي تعتمد على العد والتي تحدث في وحدة زمنية معينة (سنة ، شهر، اسبوع، يوم، ساعة، دقيقة..)، حيث m هومتوسط عدد مرات حدوث الظاهرة في تلك الوحدة الزمنية، وهو معلوم .

<u>*الأمل الرياضي:</u>

$$E(x)=m$$

<u>* التباين :</u>

$$V(x)=m$$

مثال:
يتلقى مركز المكالمات في أحد الإدارات العامة بموتسط 3 مكالمات في الساعة ، أذا اخترنا ساعة لا على التعيين في أحد أيام الأسبوع ، س1: ما احتمال تلقي المركز مكالمتين في تلك الساعة؟. س2: ما احتمال تلقي مكالمتين على الاكثر في تلك الساعة؟. س3: ما احتمال تلقي المركز أكثر من مكالمتين في تلك الساعة؟.

الحل:

بما أن المسألة متعلقة بحساب احتمال حدوث ظاهرة في وحدة زمنية معينة (الساعة) سنستعمل قانون بواسن علما متوسط عدد مرات حدوث الحادثة هو معلوم وهو $m = 3$

س1:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-3} . 3^{2}}{3!} = 0.224$$

ملاحظة:

هذا الاحتمال مأخوذ من جدول الاحتمالات المحسوبة الخاصة بقانون بواسن المقدم لكم لاحقا في الملف الخاص بحلول سلسلة التمارينات المقترحة .

س2:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{e^{-3} . 3^{0}}{3!} + \frac{e^{-3} . 3^{1}}{3!} + \frac{e^{-3} . 3^{2}}{3!}$$
$$= 0.0498 + 0.1494 + 0.224 = 0.4232$$

س3:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\big) = 1 - 0.4232$$
$$= 0.5768$$