# Surfaces d'un espace euclidien de dimension finie

Nadji Hermas

April 14, 2020

**Abstract**

Ce court texte contient ce qui a été présenté durant l'automne de l'année universitaire 2018-2019 aux étudiants de première année Master 'EDP' au département de mathématiques et d'Informatique de l'université Ziane Achour de Djelfa sur la théorie des surfaces d'un espace euclidien de dimension finie. Il contient les informations de base sur cette théorie telles que la définition et les plans tangents d'une surface, ainsi que la première forme quadratique caractérisant la géométrie intrinsèque des surfaces.

# 1 Définition d'une surface

## 1.1 Notion des coordonnées

Les espaces $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, s'appellent 'espaces des coordonnées réelles'. Soit $M$ un ensemble quelconque. Une carte locale ou encore un système de coordonnées locales sur $M$ est, par définition, un couple $(U, \Phi)$ où $U$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi : U \subset M \to \Phi(U)$ est une bijection de $U$ dans un ouvert $\Phi(U)$ d'un espace $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Si $U = M$, on dit que $(U, \Phi)$ est un système coordonnées universelles sur $M$.

Soit $E$ un espace affine de dimension $n \in \mathbb{N}$. Soit $\{O, e_1, \ldots, e_n\}$ un repère affine de $E$. L'application bijective qui envoie tout point $P \in E$ aux nombres $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\overrightarrow{OP} = \sum_{1 \leq k \leq n} x^k e_k$, s'appelle 'système de coordonnées cartésiennes'. Tous les systèmes des coordonnées cartésiennes sont des systèmes des coordonnées universelles.

Soit $(U, \Phi)$ et $(V, \Psi)$ deux carte locales de $M$. Les deux bijections

$$\Psi \circ \Phi^{-1} : \Phi(U \cap V) \to \Psi(U \cap V), \Phi \circ \Psi^{-1} : \Psi(U \cap V) \to \Phi(U \cap V),$$

sont dites 'changement des cartes' ou encore 'changements des coordonnées'. Par définition, $\Phi(U \cap V)$ et $\Psi(U \cap V)$ sont des ouverts des espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ avec $n \geq 1$ et $m \geq 1$. Par conséquent, si $\Psi \circ \Phi^{-1}$ est un homéomorphisme, alors $n = m$.

## 1.2 Définition d'une surface

Un atlas de classe $C^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sur $M$ est, par définition, une famille des cartes locales $((U_\gamma, \Phi_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ de $M$ telle que, pour tout $(\gamma, \delta) \in \Gamma \times \Gamma$ avec $U_\gamma \cap U_\gamma \neq \phi$, le changement des cartes $\Phi_{\delta\gamma} = \Phi_\delta \circ \Phi_\gamma^{-1} : \Phi_\gamma(U_\gamma \cap U_\delta) \to \Phi_\delta(U_\gamma \cap U_\delta)$ est de classe $C^k$.

Une variété de classe $C^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, est par définition un ensemble $M$ muni d'un atlas de classe $C^k$. Les variétés de classe $C^0$ sont dites encore variétés topologiques. Les variétés différentiables sont les variétés de classe $C^\infty$.

Soit $M$ une variété de classe $C^k$ avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. La topologie de $M$ est définie comme suit: un ensemble $\Omega$ de $M$ appartient à $\mathcal{T}_M$ si, et seulement si, pour toute carte locale $(U, \Phi)$ de $M$, $\Phi(U \cap \Omega)$ est un ouvert de $\Phi(\Omega)$.

Soit $x \in M$. Si $(U, \Phi)$ est une carte locale de $M$ en $x$, alors l'application $\Phi$ est un homéomorphisme de $U$ dans un ouvert $\Phi(U)$ de $\mathbb{R}^{n(x)}$. La fonction $\dim_M : x \in M \mapsto \dim_M(x) = n(x) \in \mathbb{N}$ est localement constante. Par conséquent, cette fonction est constante si $M$ est connexe.

On dit que $M$ est de dimension $n \in \mathbb{N}$ si la fonction $\dim_M$ est constante et est égale à $n$.

Une surface de classe $C^k$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ est par définition un sous-ensemble $S$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant: pour tout $x \in S$, il existe un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ contenant $x$ et un $C^k$-difféomorphisme $\Phi$ de $U$ dans un ouvert $\Phi(U)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\Phi(x) = 0$ et $\Phi(U \cap S) = \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$.

**Proposition 1.1** *Toute surface $S$ de classe $C^k$ de $\mathbb{R}^n$ est une variété de classe $C^k$ et de dimension 2, dont sa topologie est la restriction de la topologie naturelle de $\mathbb{R}^n$ à $S$.*

**Proof.** Soit Pr la projection

$$x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour tout $x \in S$, il existe un ouvert $U_x$ de $\mathbb{R}^n$ et un $C^k$-difféomorphisme $\Phi_x$ de $U$ dans un ouvert $\Phi_x(U_x)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\Phi_x(x) = 0$ et $\Phi_x(U_x \cap S) = \Phi_x(U_x) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$. Posons

$$V_x = U_x \cap S, \Psi_x = \operatorname{Pr} \circ \Phi_x, x \in S.$$

La famille $((V_x, \Psi_x))_{x\in S}$ est donc un atlas de classe $C^k$ sur $S$. D'où $S$ est une variété de classe $C^k$ et de dimension 2. ■

La proposition suivante donne des conditions équivalentes pour qu'une partie $S$ de $\mathbb{R}^n$ soit une surface de $\mathbb{R}^n$.

**Proposition 1.2** *Soit $S$ une partie de $\mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *$S$ est une surface de classe $C^k$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.*

2. *Pour tout $x \in S$, il existe un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ contenant $x$ et une submersion $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-2}$ de classe $C^k$ tels que $\Omega \cap S = f^{-1}(\{0\})$.*

3. *Pour tout $x \in S$, il existe un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ contenant $x$, un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ et une application $r : U \to \mathbb{R}^n$ qui est à la fois une immersion de classe $C^k$ dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de $U$ dans $\Omega \cap S$.*

4. *Pour tout $x \in S$, il existe un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ contenant $x$, un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $h : U \to \mathbb{R}^{n-2}$ de classe $C^k$ tels que, après permutation éventuelle des coordonnées, $\Omega \cap S$ soit égal au graphe de $h$.*

Soit $S$ une surface de classe $C^k$ ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) et $x \in S$. D'après l'énoncé 3 dans la proposition précédente, il existe un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ contenant $x$, un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ et une application $r : U \to S$ qui est à la fois une immersion de classe $C^k$ dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de $U$ dans $\Omega \cap S$. L'application $r : U \to S$ est dite une paramétrisation locale de $S$ au voisinage de $x$. Pour tout $(u, v) \in U$, les nombres $u$ et $v$ sont dites les coordonnées locales du point $P = r(u, v)$ selon $r : U \to S$. Une courbe $\gamma : [a, b] \to S' = r(S) \subset S$ est déterminée complètement par des équations de la forme:

$$u = u(t), v = v(t), a \leq t \leq b,$$

en d'autres termes,

$$\gamma(t) = r(u(t), v(t)), a \leq t \leq b.$$

Les courbes

$$u = t, v = \text{const},$$

et

$$u = \text{const}, v = t,$$

sont appelées les lignes de coordonnées associées à $r : U \to S$.

## 1.3 Exemples: sphère $\mathbb{S}^2$, tore $\mathbb{T}^2$

**a)** La sphère

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\},$$

est une surface de classe $C^\infty$ (lisse) de $\mathbb{R}^3$. On donne plusieurs méthodes pour démontrer cette affirmation.

En effet, on peut écrire

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \{(0,0,0)\} : f(x, y, z) = 0 \right\},$$

avec $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. On a $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3 / \{(0,0,0)\} ; \mathbb{R}\right)$ et

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = 2(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \{(0,0,0)\}.$$

Comme

$$\|\operatorname{grad} f(x, y, z)\|_2 = 2\|(x, y, z)\|_2 > 0, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \{(0,0,0)\},$$

et donc $\operatorname{grad} f(x, y, z) \neq 0$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \{(0,0,0)\}$, la fonction $f$ est une submersion de $\mathbb{R}^3 / \{(0,0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$. D'où, d'après l'énoncé 2 de la Proposition 1.2, $\mathbb{S}^2$ est une surface de classe $C^\infty$ (lisse) de $\mathbb{R}^3$.

La deuxième méthode pour prouver notre affirmation se base sur les coordonnées sphériques. Soit donc les deux applications suivantes

$$\begin{aligned} r_1 &: (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, \\ r_2 &: (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\cos v, \cos u \sin v, \sin u \sin v) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

qui sont de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \partial_u r_1(u, v) &= (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0), \\ \partial_v r_1(u, v) &= (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v), \\ \partial_u r_2(u, v) &= (0, -\sin u \sin v, \cos u \sin v), \\ \partial_v r_2(u, v) &= (-\sin v, \cos u \cos v, \sin u \cos v). \end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}\{\partial_u r_1(u, v), \partial_v r_1(u, v)\} &= 2 \Leftrightarrow \sin v \neq 0 \Leftrightarrow v \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \\ \operatorname{rang}\{\partial_u r_2(u, v), \partial_v r_2(u, v)\} &= 2 \Leftrightarrow \sin v \neq 0 \Leftrightarrow v \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc $r_1$ et $r_2$ sont des immersions de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^3$. De plus, $r_1$ est un homéomorphisme local de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ dans $U_1 = \mathbb{S}^2 - \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$ et $r_2$ est un homéomorphisme local de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ dans $U_2 = \mathbb{S}^2 - \{(1,0,0), (-1,0,0)\}$ où $U_1$ et $U_2$ sont munis des restrictions de la topologie de $\mathbb{R}^3$. D'où, d'après l'énonce 3 de la prpposition 1.2, $\mathbb{S}^2$ est une surface de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}^3$ puisque $\mathbb{S}^2 = U_1 \cup U_2$.

Concernant la troisième méthode, on pose

$$\begin{aligned} U &= \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2<1\right\}, \\ U_z^+ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : z>0\right\}, U_z^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : z<0\right\}, \\ U_y^+ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : y>0\right\}, U_y^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : y<0\right\}, \\ U_x^+ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : x>0\right\}, U_x^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : x<0\right\}. \end{aligned}$$

Les applications

$$\begin{aligned} r_z^+ &: (u,v) \in U \mapsto \left(u, v, \sqrt{1-u^2+v^2}\right) \in U_z^+, \\ r_z^- &: (u,v) \in U \mapsto \left(u, v, -\sqrt{1-u^2+v^2}\right) \in U_z^-, \\ r_y^+ &: (u,v) \in U \mapsto \left(u, \sqrt{1-u^2+v^2}, v\right) \in U_y^+, \\ r_y^- &: (u,v) \in U \mapsto \left(u, -\sqrt{1-u^2+v^2}, v\right) \in U_y^-, \\ r_x^+ &: (u,v) \in U \mapsto \left(\sqrt{1-u^2+v^2}, u, v\right) \in U_x^+, \\ r_x^- &: (u,v) \in U \mapsto \left(-\sqrt{1-u^2+v^2}, u, v\right) \in U_x^-, \end{aligned}$$

sont à la fois des immersions de classe $C^\infty$ et des homéomorphismes. Comme $\mathbb{S}^2 = U_z^+ \cup U_z^- \cup U_y^+ \cup U_y^- \cup U_x^+ \cup U_x^-$, selon toujours l'énoncé 3 de la proposition 1.2, $\mathbb{S}^2$ est une surface de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}^3$.

La quatrième méthode est basée sur les projections stéréographiques. Soit $N = (0,0,1)$ et $S = (0,0,-1)$ les pôles Nord et Sud de $\mathbb{S}^2$. On pose $U_N = \mathbb{S}^2 - \{(0,0,1)\}$ et $U_N = \mathbb{S}^2 - \{(0,0,-1)\}$. On obtient les projections stéréographiques de pôle Nord et Sud, en associant à $P = (x,y,z) \in U_A$ 1'intersection avec le plan $z = 0$ de la droite passant par $x$ et $N$ $(A = N)$ ou $S$ $(A = S)$. Explicitement,

$$\begin{aligned} i_N(x,y,z) &= \frac{1}{1-z}(x,y), (x,y,z) \in U_N, \\ i_S(x,y,z) &= \frac{1}{1+z}(x,y), (x,y,z) \in U_S. \end{aligned}$$

Les deux applications $i_N : U_N \to \mathbb{R}^2$ et $i_S : U_S \to \mathbb{R}^2$ sont des homéomorphismes et on a

$$\begin{aligned} r_N(u,v) &= i_N^{-1}(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2+1}\left(2u, 2v, u^2+v^2-1\right), (u,v) \in \mathbb{R}^2, \\ r_S(u,v) &= i_S^{-1}(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2+1}\left(2u, 2v, 1-u^2-v^2\right), (u,v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{S}^2 = U_N \cup U_S$ et $r_N$ et $r_S$ sont des immersions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, la sphère $\mathbb{S}^2$ est une surface de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}^3$.

**b)** Le tore de dimension 2 est défini par

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |\xi| = |\eta| = 1\},$$

où $\mathbb{S}^1$ est le cercle d'unité:

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Ici, on peut aussi appliquer le critère 3 de la proposition 1.2 en introduisant l'application:

$$r : (t, s) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(e^{it}, e^{is}\right) \in \mathbb{T}^2.$$

Cette application est à la fois une immersion de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ et un homéomorphisme local de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{T}^2$ où $\mathbb{T}^2$ est muni de la restriction de la topologie de $\mathbb{C}^2$. De plus, $r\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{T}^2$. Donc $\mathbb{T}^2$ est une surface de classe $C^\infty$ de $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$.

**c)** Le tore de révolution

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\right\},$$

est une surface de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}^3$. On peut vérifier qu'il existe un $C^\infty$-difféomorphisme de $D$ dans $\mathbb{T}^2$.

**d)** Le cône de revolution $C_r$ donné par

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

n'est pas une surface topologique de $\mathbb{R}^3$. En effet, supposons qu'il existe un homéomorphisme $\Phi$ de $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ dans un voisinage $V$ de $(0, 0, 0)$ dans $C_r$ avec $\Phi(0, 0) = (0, 0, 0)$ et posons

$$V_1 = V \cap \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\right\}, V_2 = V \cap \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\right\}.$$

$V_1$ et $V_2$ sont des sous-ensembles ouverts non vides de $V - \{(0, 0, 0)\}$. Comme $V - \{(0, 0, 0)\} = V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2 \neq \phi$, $V - \{(0, 0, 0)\}$ n'est pas connexe. Mais ceci constitue une contradiction puisque $\Phi$ est un homéomorphisme de l'ensemble connexe $U - \{(0, 0)\}$ dans $V - \{(0, 0, 0)\}$. Par conséquent, $\Phi$ n'existe pas. Encore d'après cette procédure, on peut dire que $C_r$ muni de la topologie restreinte n'est pas une variété topologique de dimension 2.

**e)** Le cube

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\|_\infty = 1\right\},$$

où $\|(x,y,z)\|_\infty = \max\{|x|, |y|, |z|\}$, est une surface topologique de $\mathbb{R}^3$. On va vérifier que $C$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.

Il est évident que l'application

$$\varphi : \xi \in C \mapsto \frac{\xi}{\|\xi\|_2} \in \mathbb{S}^2,$$

est continue. Soit $\xi \in C$ et $\eta \in \mathbb{S}^2$ avec

$$\eta = \varphi(\xi) = \frac{\xi}{\|\xi\|_2}.$$

On a donc

$$\|\eta\|_\infty = \frac{\|\xi\|_\infty}{\|\xi\|_2} = \frac{1}{\|\xi\|_2}.$$

Par suite,

$$\xi = \frac{\eta}{\|\eta\|_\infty}.$$

Ceci montre que $\varphi$ est un homéomorphisme de $C$ dans $\mathbb{S}^2$ avec

$$\varphi^{-1}(\eta) = \frac{\eta}{\|\eta\|_\infty}, \eta \in \mathbb{S}^2.$$

On remarque ici que $\mathbb{S}^2$ est une surface de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}^3$ tandis que $C$ n'est pas une surface de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^3$.

**f)** La bande de Möbius donnée par la paramétrisation

$$\begin{aligned} r(u,v) &= \left(\left(R - v\sin\frac{v}{2}\right)\sin u, \left(R - v\sin\frac{v}{2}\right)\cos u, v\cos\frac{v}{2}\right), \\ 0 &< u < 2\pi, -1 < v < 1, \end{aligned}$$

où $R > 0$, est une surface de classe $C^\infty$ de $\mathbb{R}^3$.

# 2 Plans tangents d'une surface

Soit $S$ une surface de classe $C^k$ ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) de $\mathbb{R}^n$. Soit $r : U \to S$ une paramétrisation locale de $S$. Pour tout point $x = r(u,v) \in r(U)$, le plan vectoriel

$$T_xS = \text{vect}\{\partial_u r(u,v), \partial_v r(u,v)\} = \{\lambda\partial_u r(u,v) + \mu\partial_v r(u,v) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

et le plan affine

$$x + T_xS$$

sont dit les plans (vectoriel et affine) tangents à $S$ en $x$. Ces plans sont indépendants de la paramétrisation locale $r : U \to S$. En effet, soit $x_0 = r(u_0, v_0) \in r(U)$. Il existe, d'après la critère 2 de la proposition 1.2, un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ contenant $x_0$ et une submersion $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-2}$ de classe $C^k$ tels que $\Omega \cap S = f^{-1}(\{0\})$. On peut supposer $r(U) \subset \Omega \cap S$. D'où on a

$$f \circ r(u, v) = 0, (u, v) \in U.$$

Par suite,

$$f'(r(u,v))(\partial_u r(u,v)) = f'(r(u,v))(\partial_v r(u,v)), (u,v) \in U,$$

ce qui montre que $\{\partial_u r(u,v), \partial_v r(u,v)\} \subset \ker f'(r(u,v))$, $(u,v) \in U$. Comme $\dim \ker f'(r(u,v)) = 2$ et les deux vecteurs $\partial_u r(u,v)$ et $\partial_v r(u,v)$ sont linéairement indépendants, on a

$$\ker f'(r(u,v)) = \operatorname{vect}\{\partial_u r(u,v), \partial_v r(u,v)\} = T_{r(u,v)}S, (u,v) \in U.$$

En particulier,

$$\ker f'(x_0) = \operatorname{vect}\{\partial_u r(u_0,v_0), \partial_v r(u_0,v_0)\} = T_{x_0}S.$$

Donc si $\widetilde{r} : \widetilde{U} \to S$ une deuxième paramétrisation locale de $S$ au voisinage de $x_0$ avec $\widetilde{r}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0) = x_0$, alors

$$T_{x_0}S = \ker f'(x_0) = \operatorname{vect}\{\partial_{\widetilde{u}} \widetilde{r}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0), \partial_{\widetilde{v}} \widetilde{r}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)\}.$$

Soit $S$ une surface de classe $C^k$ $(k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$ de $\mathbb{R}^3$ et $r : U \to S$ une paramétrisation locale de $S$. Pour tout point $(x,y,z) = r(u,v) \in r(U)$, les deux vecteurs d'unité

$$\overrightarrow{n}(u,v) = \frac{\partial_u r(u,v) \times \partial_v r(u,v)}{\|\partial_u r(u,v) \times \partial_v r(u,v)\|_2}, -\overrightarrow{n}(u,v),$$

sont les vecteurs d'unité normaux à $S$ en $(x,y,z) = r(u,v)$. La droite affine

$$(x,y,z) + \operatorname{vect}\{\overrightarrow{n}(u,v)\} = (x,y,z) + \{\lambda \overrightarrow{n}(u,v) : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

est la droite normal à $S$ en $(x,y,z)$.

L'équation cartésienne du plan tangent $(x,y,z) + T_{(x,y,z)}S$ est

$$\{(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) - (x,y,z)\} \cdot \overrightarrow{n}(u,v) = 0,$$

ou encore

$$\{(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) - (x,y,z)\} \cdot \{\partial_u r(u,v) \times \partial_v r(u,v)\} = 0,$$

ou $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ est un point arbitraire de $(x,y,z)+T_{(x,y,z)}S$.

Dans le cas où $S$ est donnée localement par une paramétrisation de la forme

$$r:(u,v)\in U\mapsto (x,y,z)=r(u,v)=(u,v,f(u,v))\in S,$$

l'équation cartésienne de $(x,y,z)+T_{(x,y,z)}S$ est

$$\widetilde{z}-z=\partial_u f(u,v)(\widetilde{x}-x)+\partial_v f(u,v)(\widetilde{y}-y).$$

Enfin, si $S$ est donnée localement par une équation de la forme

$$H(x,y,z)=0,$$

alors $(x,y,z)+T_{(x,y,z)}S$ est donné par l'équation cartésienne

$$\partial_x H(x,y,z)(\widetilde{x}-x)+\partial_y H(x,y,z)(\widetilde{y}-y)+\partial_z H(x,y,z)(\widetilde{z}-z)=0.$$

# 3 Première forme quadratique d'une surface

Soit $S$ une surface de classe $C^k$ ($k\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$) de $\mathbb{R}^n$ et $r:U\to S$ une paramétrisation locale de $S$. On pose

$$\begin{aligned}E &= E(u,v)=\|\partial_u r(u,v)\|_2^2, F=F(u,v)=(\partial_u r(u,v),\partial_u r(u,v))_{\mathbb{R}^n},\\ G &= G(u,v)=\|\partial_v r(u,v)\|_2^2,(u,v)\in U.\end{aligned}$$

Dans ce cas, pour tout $(du,dv)\in\mathbb{R}^2$, on peut écrire:

$$\begin{aligned}&\|\partial_u r(u,v)\,du+\partial_v r(u,v)\,dv\|_2^2\\ =\ &\|\partial_u r(u,v)\|_2^2\,du^2+2(\partial_u r(u,v),\partial_u r(u,v))_{\mathbb{R}^n}\,dudv+\|\partial_v r(u,v)\|_2^2\,dv^2\\ =\ &Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=I(u,v)(du,dv)=I.\end{aligned}$$

Il est évident que, pour tout $(u,v)\in U$, $I(u,v)$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $I:(u,v)\mapsto I(u,v)$ est appelée la première forme quadratique de $S$ déduite de $r$.

Les propriétés de $S$ caractérisées complètement par sa première forme quadratique sont appelées les propriétés intrinsèque de $S$. Elles constituent l'objectif de la géométrie intrinsèque de $S$.

## 3.1 Longueurs des courbes tracées sur une surface

Soit $S$ une surface de classe $C^k$ ($k\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$) de $\mathbb{R}^n$ et $r:U\to S$ une paramétrisation locale de $S$. Soit $\gamma:[a,b]\to r(U)\subset S$ une courbe de classe $C^1$ tracée sur la partie $r(U)$ de $S$. On a alors

$$\gamma(t)=r(u(t),v(t)),a\leq t\leq b,$$

où $(u,v):[a,b]\to U$ est une fonction de classe $C^1$. Par suite,

$$\gamma'(t)=\partial_u r\,(u(t),v(t))\,u'(t)+\partial_v r\,(u(t),v(t))\,v'(t)\,,a\leq t\leq b,$$

et donc

$$l(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|_2\,dt=\int_a^b\sqrt{I\,(u(t),v(t))\,(u'(t),v'(t))}dt=\int_a^b\sqrt{I}dt.$$

Par conséquent, les longueurs des courbes tracées sur $S$ appartiennent à la géométrie intrinsèque de $S$.

## 3.2 Surfaces isométriques

Soit $S$ une surface de classe $C^k$ ($k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$) de $\mathbb{R}^n$ et $f:S\to\mathbb{R}^m$ une fonction donnée. On dit que $f$ est de classe $C^j$ ($0\leq j\leq k$) de $S$ dans $\mathbb{R}^m$ si pour toute paramétrisation locale $r:U\subset\mathbb{R}^2\to S$ de $S$, $f\circ r$ est de classe $C^j$ de $U$ dans $\mathbb{R}^m$.

Soit $S_1$ et $S_2$ deux surfaces de classe $C^k$ ($k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$) de $\mathbb{R}^n$. On dit que $f:S_1\to S_2$ est un $C^j$-difféomorphisme ($0\leq j\leq k$) de $S_1$ dans $S_2$ si $f$ est une bijection de $S_1$ dans $S_2$ et $f$ et $f^{-1}$ sont de classe $C^j$.

Soit $f:S_1\to S_2$ une fonction de classe $C^j$ ($1\leq j\leq k$). On dit que $f$ est isométrique ou encore une isométrie de $S_1$ dans $S_2$ si pour toute courbe $\gamma_1:[a,b]\to S_1$ de classe $C^1$, $l(\gamma_1)=l(\gamma_2)$ avec $\gamma_2=\Phi\circ\gamma_1$.

Une transformation isométrique de classe $C^j$ ($1\leq j\leq k$) de $S_1$ dans $S_2$ est par définition un $C^j$-difféomorphisme isométrique de $S_1$ dans $S_2$.

On a la

**Proposition 3.1** *Soit $S_1$ et $S_2$ deux surfaces de classe $C^k$ ($k\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$) de $\mathbb{R}^n$.*

1. *Si $r_1:U\to S_1$ et $r_2:U\to S_2$ sont deux paramétrisations locaux de $S_1$ et de $S_2$ avec $I_{r_1}=I_{r_2}$, alors $r_2\circ r_1^{-1}$ est une transformation isométrique de classe $C^k$ de $r_1(U)$ dans $r_2(U)$.*

2. *Si $\Phi:S_1\to S_2$ est une transformation isométrique de classe $C^j$ ($1\leq j\leq k$), alors pour toute paramétrisation locale $r_1:U\subset\mathbb{R}^2\to S_1$ de $S_1$, $r_2=\Phi\circ r_1:U\subset\mathbb{R}^2\to S_2$ est une paramétrisation locale de classe $C^j$ de $S_2$ vérifiant $I_{r_1}=I_{r_2}$.*

La partie plane

$$S_1=\left\{(x,y,z):0<x<\frac{\pi}{2},0<y<1,z=0\right\},$$

et la partie cylindrique

$$S_2 = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, x, y > 0, 0 < z < 1\right\},$$

sont isométriques. En effet, les deux paramétrisations

$$\begin{array}{rcl} r_1 & : & (u, v) \in U = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[ \times \left]0, 1\right[ \mapsto (u, v, 0) \in S_1, \\ r_2 & : & (u, v) \in U = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[ \times \left]0, 1\right[ \mapsto (\cos u, \sin u, v) \in S_2, \end{array}$$

sont universelles et on a

$$I_{r_1} = I_{r_2} = du^2 + dv^2.$$

Par conséquent, selon l'énoncé 1 de la proposition 3.1, l'application

$$r_2 \circ r_1^{-1} : (x, y, z) \in S_1 \mapsto (\cos x, \sin x, y) \in S_2,$$

est une transformation isométrique de $S_1$ dans $S_2$.

## 3.3 Angles entre les courbes tracées sur une surface

Soit $S$ une surface de classe $C^k$ $(k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$ de $\mathbb{R}^n$ et $r : U \to S$ une paramétrisation locale de $S$. Soit $\gamma : [a, b] \to r(U) \subset S$ et $\delta : [c, d] \to r(U) \subset S$ deux courbes de classe $C^1$ tracées sur la partie $r(U)$ de $S$. L'angle entre $\gamma$ et $\delta$ au point $x_0 = \gamma(t_0) = \delta(s_0)$ est par définition l'angle entre les vecteurs tangents $\gamma'(t_0)$ et $\delta'(s_0)$. Soit $\theta$ cet angle. On a

$$\begin{array}{rcl} \gamma(t) & = & r(u_\gamma(t), v_\gamma(t)), a \leq t \leq b, \\ \delta(t) & = & r(u_\delta(t), v_\delta(t)), c \leq t \leq d. \end{array}$$

Par suite,

$$\begin{array}{rcl} \gamma'(t) & = & \partial_u r(u_\gamma(t), v_\gamma(t)) u_\gamma'(t) + \partial_v r(u_\gamma(t), v_\gamma(t)) v_\gamma', a \leq t \leq b, \\ \delta'(t) & = & \partial_u r(u_\delta(t), v_\delta(t)) u_\delta'(t) + \partial_v r(u_\delta(t), v_\delta(t)) v_\delta', a \leq t \leq b. \end{array}$$

Pour déterminer $\theta$, il suffit donc de calculer la quantité

$$\cos\theta = \frac{(\gamma'(t_0), \delta'(s_0))}{\|\gamma'(t_0)\|_2 \|\delta'(t_0)\|_2}.$$

En particulier, l'angle $\theta$ entre les deux lignes de coordonnées (associées à $r : U \to S$):

$$u = t, v = v_0,$$

et

$$u = u_0, v = t,$$

au point $x_0 = r(u_0, v_0)$ est donné par

$$\cos\theta = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)}\sqrt{G(u_0, v_0)}} = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}.$$

Par conséquent, ces lignes sont orthogonales si, et seulement si, $F = 0$.

## 3.4 Aires des régions d'une surface

Soit $S$ une surface de classe $C^k$ $(k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$ de $\mathbb{R}^n$ et $r : U \to S$ une paramétrisation locale de $S$. Si $K \subset U$, alors l'aire de la partie $r(K)$ de $S$ est donné par

$$\begin{aligned} \text{air}(r(K)) &= \text{mes}(r(K)) = \iint_K \sqrt{E(u,v)\,G(u,v) - F(u,v)^2}\,dudv \\ &= \iint_K \sqrt{EG - F^2}\,dudv. \end{aligned}$$

Pour $n = 3$, on a

$$r : (u,v) \in U \to r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in S,$$

et donc

$$\text{air}(r(K)) = \iint_K \sqrt{(x_u y_v - x_v y_u)^2 + (x_u z_v - x_v z_u)^2 + (y_u y_v - y_v z_u)^2}\,dudv,$$

où $x_u = \partial_u x$ et $x_v = \partial_v x$.

Par exemple, pour calculer l'aire de la sphère

$$\mathbb{S}_R^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\},$$

on considère les coordonnées sphériques:

$$\begin{cases} x = R\cos u \sin v, \\ y = R\sin u \sin v, \\ z = R\cos v \end{cases}, 0 < u < 2\pi, 0 < v < \pi.$$

On a

$$\begin{aligned} \partial_u r(u,v) &= (-R\sin u \sin v, R\cos u \sin v, 0), \\ \partial_v r(u,v) &= (R\cos u \cos v, R\sin u \cos v, -R\sin v). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{array}{rcl} E & = & \|\partial_u r\left(u,v\right)\|_2^2 = R^2\sin^2 v, F = \left(\partial_u r\left(u,v\right), \partial_v r\left(u,v\right)\right)_{\mathbb{R}^3} = 0, \\ G & = & \|\partial_v r\left(u,v\right)\|_2^2 = R^2, \sqrt{EG-F^2} = R^2\sin v. \end{array}$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} \text{air}\left(r\left(]0,2\pi[\times]0,\pi[\right)\right) & = & \displaystyle\iint_{]0,2\pi[\times]0,\pi[} \sqrt{EG-F^2}dudv \\ & = & R^2 \displaystyle\iint_{]0,2\pi[\times]0,\pi[} \sin v du dv \\ & = & 2\pi R^2 \displaystyle\int_0^\pi \sin v dv = 4\pi R^2. \end{array}$$

D'autre part,

$$\text{air}\left(r\left(]0,2\pi[\times]0,\pi[\right)\right) = \mathbb{S}_R^2 - \left\{(x,0,z) : x^2+z^2 = R^2\right\}.$$

Comme l'aire du cercle $\{(x,0,z) : x^2+z^2 = R^2\}$ est nulle, il vient

$$\text{air}\left(\mathbb{S}_R^2\right) = \text{air}\left(r\left(]0,2\pi[\times]0,\pi[\right)\right) = 4\pi R^2.$$

C'est la célèbre relation qui donne l'aire de la sphère de dimension 2 et qui a été démontrer avec toute précision par Al-Hassan Ibn al-Haytham.