حل السلسلة الرابعة مقياس: رياضيات 2

حل التمرين الأول أ.أ.م مراد عبدالقادر

إيجاد القيم الذاتية والأشعة الذاتية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. إيجاد القيم الذاتية:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \quad \lambda_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

2. إيجاد الأشعة الذاتية:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

✔ من اجل $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 + 3x_2 = 0 => x_1 = -\frac{3}{2}x_2$$

$$x_1 = -\frac{3}{2}s$$
$$x_2 = s$$

وعليه فان الشعاع الذاتي في هذه الحالة هو:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} s \qquad \forall\, s \neq 0$$

✔ من اجل $\lambda_2=4$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-3x_1 + 3x_2 = 0 => x_1 = x_2 \qquad 2x_1 - 2x_2 = 0 => x_1 = x_2$$

وعليه فان الشعاع الذاتي في هذه الحالة هو:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \qquad \forall\, t \neq 0$$

....

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. إيجاد القيم الذاتية:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 \qquad \sqrt{\Delta} = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \quad \lambda_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

2. إيجاد الأشعة الذاتية:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

✔ من اجل $\lambda_1=-2$

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 4x_2 = 0 => x_1 = -4x_2$$

$$x_1 = -4s$$
$$x_2 = s$$

وعليه فان الشعاع الذاتي في هذه الحالة هو:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} s \qquad \forall\, s \neq 0$$

✓ من اجل $\lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-4x_1 + 4x_2 = 0 => x_1 = x_2 \qquad x_1 - x_2 = 0 => x_1 = x_2$$

وعليه فان الشعاع الذاتي في هذه الحالة هو:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \qquad \forall\, t \neq 0$$

....

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. إيجاد القيم الذاتية:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 + 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

$$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (2) = -4 = 4i^2 \qquad \sqrt{\Delta} = \pm 2i$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i \quad \lambda_3 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$$

2. إيجاد الأشعة الذاتية:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

✓ من اجل $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = 0 \quad -x_1 = 0 \;=>\; x_1 = 0 \quad x_3 = s$$

وعليه فان الشعاع الذاتي في هذه الحالة هو:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} \qquad \forall\, s \neq 0$$

✓ من اجل $\lambda_2 = 1-i$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 2 & -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$<=> \begin{cases} ix_1 - x_2 + 0x_3 = 0 \ldots (1) \\ x_1 + ix_2 + 0x_3 = 0 \ldots (2) \\ 2x_1 - x_2 + ix_3 = 0 \ldots (3) \end{cases} \qquad => \begin{cases} x_1 = -ix_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = (2-i)x_2 \end{cases}$$

وعليه فان الشعاع الذاتي في هذه الحالة هو:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ t \\ (2-i)t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 2-i \end{bmatrix} t \qquad \forall\, t \neq 0$$

✓ من اجل $\lambda_2 = 1+i$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 2 & -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$<=> \begin{cases} -ix_1 - x_2 + 0x_3 = 0 \ldots (1) \\ x_1 - ix_2 + 0x_3 = 0 \ldots (2) \\ 2x_1 - x_2 - ix_3 = 0 \ldots (3) \end{cases} \qquad => \begin{cases} x_1 = ix_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = (2+i)x_2 \end{cases}$$

وعليه فان الشعاع الذاتي في هذه الحالة هو:

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i\grave{t}\\ \grave{t}\\(-2+i)\grave{t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i\\1\\2+i\end{bmatrix}\grave{t}\qquad \forall\, \grave{t}\neq 0$$

....

$$F=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&2&0\\1&-1&3\end{bmatrix}$$

1. إيجاد القيم الذاتية:

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&2&0\\1&-1&3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda&0&1\\-1&2-\lambda&0\\1&-1&3-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\-1&2-\lambda&0\\1&-1&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1&2-\lambda\\1&-1\end{vmatrix}+(3-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&0\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-1+\lambda)+(3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)=(1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+5)$$

$$\lambda_1=1\quad \Delta=25-4\times1\times(5)=5\quad \sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$$

$$\lambda_1=1\quad \lambda_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\quad \lambda_3=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

2. إيجاد الأشعة الذاتية:

$$(A-\lambda I)x=0$$

✓ من اجل $\lambda_1=1$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda&0&1\\-1&2-\lambda&0\\1&-1&3-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$x_3=0\quad x_1=x_2\quad x_1-x_2+2x_3=0$$

وعليه فان الشعاع الذاتي في هذه الحالة هو:

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s\\s\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}s \qquad \forall\, s\neq 0$$

✓ من اجل $\lambda_2=1/2(5-\sqrt{5})$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\-1 & 2-\lambda & 0\\1 & -1 & 3-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 1\\-1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & 0\\1 & -1 & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$<=>\begin{cases}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x_1+0x_2+x_3=0\ldots(1)\\-x_1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x_2+0x_3=0\ldots(2)\\x_1-x_2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x_3=0\ldots(3)\end{cases}\qquad =>\begin{cases}x_1=x_1\\x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x_1\\x_3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}x_1\end{cases}$$

وعليه فان الشعاع الذاتي في هذه الحالة هو:

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\\\frac{3-\sqrt{5}}{2}t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\\frac{3-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}t \qquad \forall\, t\neq 0$$

✓ من اجل $\lambda_2=1/2(5+\sqrt{5})$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\-1 & 2-\lambda & 0\\1 & -1 & 3-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 1\\-1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & 0\\1 & -1 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$<=>\begin{cases}-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}x_1+0x_2+x_3=0\ldots(1)\\ -x_1-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x_2+0x_3=0\ldots(2)\\ x_1-x_2+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x_3=0\ldots(3)\end{cases} \qquad => \begin{cases}x_1=x_1\\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x_1\\ x_3=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}x_1\end{cases}$$

وعليه فان الشعاع الذاتي في هذه الحالة هو:

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}t\\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}t \qquad \forall\, t\neq 0$$

حل التمرين الثاني

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=3\\ 0x_1+x_2+x_3=-1\\ 0x_1+x_2+2x_3=4\end{cases}$$

1. حل الجملة بطريقة غوص

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&3\\0&1&1&-1\\0&1&2&4\end{array}\right)\begin{array}{l}\ldots L_1\\ \ldots L_2\\ \ldots L_3\end{array}$$

الخطوة الأولى:

$$L_3=L_3-L_2$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&3\\0&1&1&-1\\0&0&1&5\end{array}\right)\begin{array}{l}\ldots L_1\\ \ldots L_2\\ \ldots L_3\end{array}$$

الخطوة الثانية: النظام الخطي السابق يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$(S):\begin{cases}x_1+x_2-x_3=3\ldots(1)\\ x_2+x_3=-1\ldots(2)\\ x_3=5\ldots\ldots\ldots\ldots(3)\end{cases}$$

من 3 نجد :

$$x_3 = 5$$

وبالتعويض في 2 و 1 نجد بقية المجاهيل:

$$x_2 = -6 \ , \qquad x_1 = 14$$

2. إيجاد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة A

أ. إيجاد القيم الذاتية:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda) - 1\big) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1)$$

$$\Delta = 9 - 4 \times 1 \times (1) = 5 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \lambda_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

ب. إيجاد الأشعة الذاتية:

✓ من اجل $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = 0 \quad x_2 = x_3 = 0$$

وعليه فان الشعاع الذاتي في هذه الحالة هو:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s \qquad \forall\, s \neq 0$$

✓ من اجل $\lambda_2 = 1/2(3-\sqrt{5})$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$<=> \begin{cases} \frac{\sqrt{5-1}}{2}x_1 + 1x_2 - x_3 = 0 \ldots (1) \\ 0x_1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}x_2 + x_3 = 0 \ldots (2) \\ 0x_1 + x_2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}x_3 = 0 \ldots (3) \end{cases} \quad => \begin{cases} x_1 = (\sqrt{5}+2)x_3 \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

وعليه فان الشعاع الذاتي في هذه الحالة هو:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{5}+2)t \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5}+2 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}t \qquad \forall\, t \neq 0$$

✓ من اجل $\lambda_2 = 1/2(3+\sqrt{5})$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$<=> \begin{cases} \frac{-\sqrt{5}-1}{2}x_1 + x_2 - x_3 = 0 \ldots (1) \\ 0x_1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}x_2 + x_3 = 0 \ldots (2) \\ 0x_1 + x_2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}x_3 = 0 \ldots (3) \end{cases} \quad => \begin{cases} x_1 = (-\sqrt{5}+2)x_3 \\ x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

وعليه فان الشعاع الذاتي في هذه الحالة هو:

$$\mathrm{x}=\begin{bmatrix}\mathrm{x}_1\\ \mathrm{x}_2\\ \mathrm{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-\sqrt{5}+2)\mathrm{t}\\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{t}\\ \mathrm{t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{5}+2\\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\ 1\end{bmatrix}\mathrm{t}\qquad \forall\, t\neq 0$$