ÉLECTROSTATIQUE

I. GÉNERALITÉS

On adopte l'approche historique dans l'ordre chronologique qui est une approche expérimentale, sauf pour expliquer les phénomènes à l'échelle atomique, où il nous faut faire un bond en avant dans l'histoire pour connaître la structure de l'atome.

Mise en évidence du phénomène d'électrisation : Si on frotte un morceau de plastique ou de verre avec un morceau de fourrure ou de soie on peut observer qu'il a la faculté d'attirer des corps très légers tel que des morceaux de papier.

Les deux types de matériaux :

- ***Les isolants ou diélectriques :*** Pour ce type matériaux l'électrisation reste localisée à l'endroit où on l'a crée.
- ***Conducteurs :*** Pour ce type matériaux l'électrisation se répand dans tout le corps

Les deux types d'électricité : Approche historique deux groupes de matériaux élecrisés qui s'attirent ou se répulsent mutuellement. Explication.

- ***Positive :*** elle est expliquée microscopiquement par un manque d'électrons
- ***Négative :*** elle est expliquée microscopiquement par un excès d'électrons
- ***Remarque :*** un corps non électrisé est dit neutre.

Transfert d'électrons : Notion d'atome, explication du processus d'électrisation au niveau atomique, les types de charges, et les types de matériaux.

Affinité électronique : Au niveau atomique (Na^+Cl^-), au niveau macroscopique : séries triboélectriques exemple : poil de lapin – verre – mica – laine – poil de chat – soie – bois – ambre – résine – soufre – ébonite – celluloid.

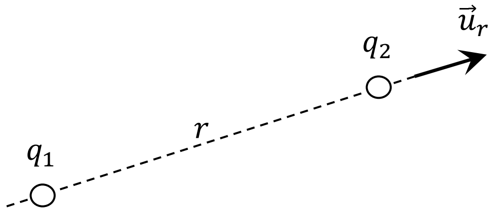
Principe de la conservation de la charge électrique : « La charge électrique totale contenue dans un système isolé, i.e. la somme algébrique des charges positive et négative présentent à chaque instant reste constante. »

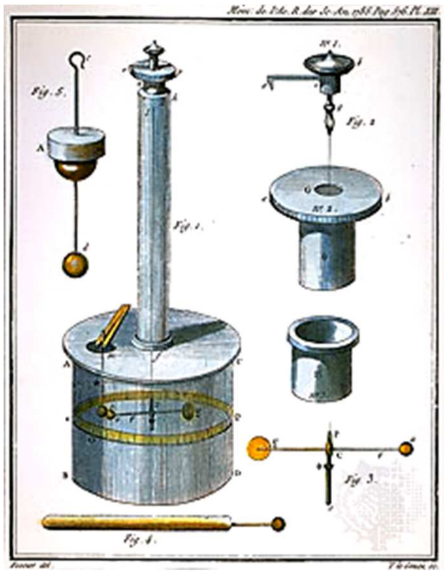
Charge ponctuelle : (en réalité elle n'existe pas) « On considérera qu'une charge est ponctuelle si les dimensions du corps qui la porte sont petite par rapport aux distances considérées dans le problème étudié. »

II. INTÉRACTION ÉLECTROSTATIQUE – LOI DE COULOMB

II.1. LOI DE COULOMB

Justification de la loi de Coulomb : expérience de Coulomb.





La force électrique exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 placées toutes les deux dans le vide est donnée par la loi:

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 [\text{MKSA}]}$$

r étant la distance entre les deux charges.
K est une constante. ε_0 est appelée la permittivité du vide.
Et $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire dirigé suivant r.
Ainsi deux charges identiques se repoussent ($\vec{F}_{1/2}$ dans le sens de $\vec{u}_r$) et deux charges opposées s'attirent ($\vec{F}_{1/2}$ opposé à $\vec{u}_r$).

Remarque sur la constante K : La constante K est déterminée suivant le système de d'unité que nous choisissons. Dans le système c.g.s. la valeur de K est égale à l'unité, ce qui peut paraître plus simple, mais plus loin dans l'étude de l'électromagnétisme elle s'avère être plutôt encombrante. Dans le système MKSA cette valeur est de 9×10^9 nous pourrons vérifier par la suite (électrocinétique) qu'elle donne des résultats numériques plus faciles à manier.

Remarque sur l'ordre de grandeur des charges : Dans le système MKSA le Coulomb est une très grande charge (deux charges opposées de 01 Coulomb chacune et distante de $1\,m$ l'une de l'autre, s'attirent avec une force de $9 \times 10^9\,N$ ce qui est l'équivalent du poids d'un immeuble de $900\,000$ tonnes) ce qui nous mène à introduire des sous multiples du Coulomb, micro Coulomb (μC), nano Coulomb (nC) ou pico Coulomb (pC).

Remarque sur l'ordre de grandeurs des forces électrostatiques et gravitationnelles.

Au niveau microscopique : exemple de l'atome d'Hydrogène = un électron et un proton séparés par une distance a_0

$e = 1,6 \times 10^{-19}\ C$; $m_{e^-} = 9,1 \times 10^{-31}\ kg$; $m_p = 1,672 \times 10^{-27}\ kg$; $g = 9,81\ ms^{-2}$

$G = 6,67 \times 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$; $a_0 = 0,53 \times 10^{-10}\ m$; $K = 9 \times 10^{-9}\ N.m^2.C^{-2}$

Force coulombienne $F_C \approx 10^{-7}\ N$

Force gravitationnelle $F_G \approx 4 \times 10^{-47}\ N$

Poids de l'électron $P_e \approx 9 \times 10^{-30}\ N$ Poids du proton $P_p \approx 1,6 \times 10^{-26}\ N$

Au niveau macroscopique : les forces gravitationnelles sont plus grandes en générale que les forces électrostatiques (charges faibles, et distances grandes).

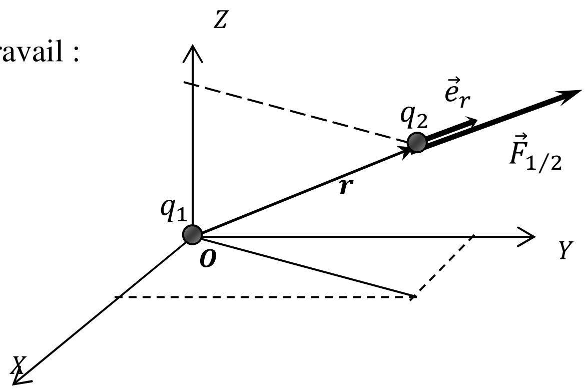
Remarque sur la validité de la loi de Coulomb : Cette loi n'est valable que pour des charges fixes ou en mouvement lent, elle est correcte au milliardième sur des distances allant jusqu'au centimètre ou quelques mètres.

II.2. ENERGIE POTENTIELLE ELECTROSTATIQUE

La force électrique exercée par la charge q_1 placée à l'origine O sur la charge q_2 :

$$\vec{F}_{1/2} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$

$\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire dans la direction de r et dirigé de q_1 vers q_2. Comme la masse M est fixée à l'origine O alors $\vec{u}_r = \vec{e}_r$ (coordonnées sphériques)



Remplaçons la loi de force dans l'intégrale donnant le travail :

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}_{1/2} \bullet d\vec{l} = \int_A^B \left(K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r\right) \bullet d\vec{l}$$

En coordonnées sphériques

$$d\vec{l} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta\,.d\varphi.\vec{e}_\varphi\,.$$

D'où :

$$W_A^B = \int_A^B \left(K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r\right) \bullet \left(dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta\,.d\varphi.\vec{e}_\varphi\right) = \int_A^B K\frac{q_1 q_2}{r^2}dr$$

En intégrant, nous trouvons :

$$W_A^B = \left[-K\frac{q_1 q_2}{r}\right]_A^B = -K\frac{q_1 q_2}{r_B} + K\frac{q_1 q_2}{r_A}$$

En comparant cette expression avec l'expression donnant l'énergie cinétique, nous trouvons :

$$W_A^B = \frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = -K\frac{q_1 q_2}{r_B} + K\frac{q_1 q_2}{r_A}$$

Et donc

$$\frac{1}{2}m.V_B^2 + K\frac{q_1 q_2}{r_B} = \frac{1}{2}m.V_A^2 + K\frac{q_1 q_2}{r_A}$$

Cette valeur étant la même en A et en B quelque soit les deux point A et B. En d'autre termes la valeur $\left(\frac{1}{2}m.V^2 + K\frac{q_1q_2}{r}\right)$ est la même quelque soit le point où nous la calculons. Donc :

$$\frac{1}{2}m.V^2 + K\frac{q_1q_2}{r} = \text{Constante}$$

Cette quantité est une énergie, elle est toujours constante (tant qu'il n'y a pas d'autres forces entre les deux masses). <u>On appelle cette énergie « Energie mécanique totale » et on dit qu'elle est conservée</u>.

Identifions maintenant les différents termes :

$E_T = \frac{1}{2}m.V^2 + K\frac{q_1q_2}{r}$ Energie mécanique totale (elle est constante)

$E_c = \frac{1}{2}m.V^2$ Energie cinétique

$$\boxed{U = K\frac{q_1q_2}{r}}$$

Est appelée « énergie potentielle électrostatique »

$$\boxed{E_T = E_c + U = \text{Constante}}$$

Et le travail

$$\boxed{W_A^B = \Delta E_c = -\Delta U}$$

Remarque importante :

En fait avec l'intégrale limitée $W_A^B = \int_A^B \vec{F}\bullet d\vec{l}$ nous avons calculé la variation de l'énergie potentielle entre les point A et B.

En calculant l'intégrale non limitée on trouve une constante d'intégration

$$dW = -dU$$

$$\int \vec{F}\bullet d\vec{l} = \int K\frac{q_1q_2}{r^2}dr = -K\frac{q_1q_2}{r} + C = -U(r)$$

La constante C est calculée à partir de la connaissance de l'énergie potentielle en un point r.

En général, on choisit l'énergie potentielle gravitationnelle nulle à l'infini $U(r \to +\infty) = 0$. En remplaçant :

$$0 = -K\frac{q_1q_2}{+\infty} + C \qquad \Rightarrow \qquad C = 0$$

Et

$$\boxed{U = K\frac{q_1q_2}{r}}$$

On appelle $(r = +\infty)$ « Origine des énergie potentielles ».

Remarque :

U est l'énergie potentielle de l'ensemble des deux charges (q_1, q_2).

Si une des charges est fixée (par exemple q_1), l'énergie potentielle peut être assimilée à l'énergie potentielle de la charge non fixe (q_2), car elle seule peut transformer cette énergie potentielle en énergie cinétique (mouvement).

III. CHAMP ET POTENTIEL ÉLECROSTATIQUES

III.1. CHAMP ET POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUES CRÉÉS PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

Prenons la relation précédente

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r$$

Nous pouvons écrire la force électrostatique sous la forme

$$\boxed{\vec{F} = q_2.\vec{E}_1(\vec{r})}$$

On dit que $\vec{F}_{1/2}$ est la force appliquée à une charge q_2 placée en $\vec{r}$, et $\vec{E}_1(\vec{r})$ est le Champ crée par la charge q_1 au point $\vec{r} = r.\vec{u}_r$.

Justifier la notion de champ.

Donc le champ crée par une charge q_1 en un point $\vec{r} = r.\vec{u}_r$ est donné par :

$$\boxed{\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{u}_r}$$

- Le champ crée par une charge positive est donc sortant (dans le sens de $\vec{u}_r$)
- Le champ crée par une charge négative est entrant (sens opposé à $\vec{u}_r$)

On définit le Potentiel créée par la charge q_1 au point $\vec{r} = r.\vec{u}_r$ par :

$$\boxed{V_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}}$$

L'énergie potentielle électrique d'une charge q_2 placée en $\vec{r}$ est donnée par

$$U(r) = K\frac{q_1 q_2}{r}$$

Donc

$$\boxed{U = q_2.V(r)}$$

Notations :

Pour une charge q .

Le champ crée en un point $\vec{r}$ est donné par

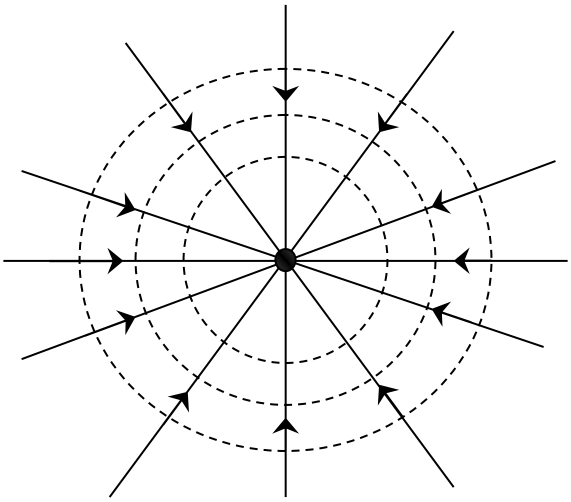
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}}$$

Le potentiel crée en un point $\vec{r}$ est donné par

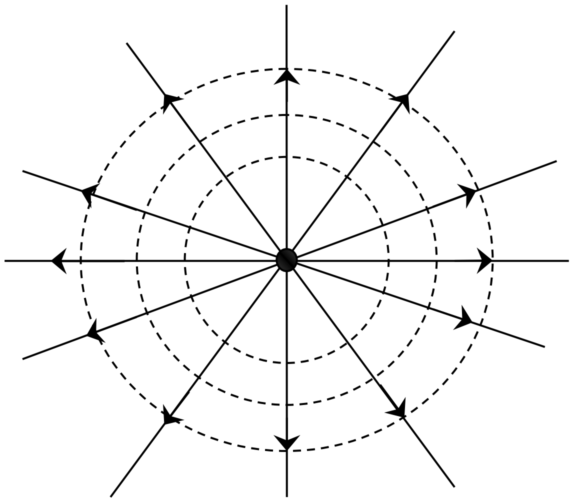
$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

- Les ***Lignes de champs*** sont les lignes en tout point parallèles au champ électrique.
- Les ***Surfaces équipotentielles*** sont des surfaces où en tout point le potentiel est le même.
- Les lignes de champs sont en tout point perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.
- L'ensemble des lignes de champs et des surfaces équipotentiel constitue le ***Spectre du champ électrique***.

Représentation du spectre du champ produit par une charge ponctuelle.



$\boldsymbol{q} < 0$



$\boldsymbol{q} > 0$

Pour une charge ponctuelle, les lignes de champs (trait plein) sont des droites passant par la charge et les surfaces équipotentielle (tirets) sont des sphères centrées sur la charge.

III.2. RELATION ENTRE LE CHAMP ET LE POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUES

D'après les équations précédentes on peut démontrer que :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}\big(V(r)\big)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}\big(U(r)\big)}$$

Nous définissons la différentielle totale d'une fonction $V(r)$ à trois variables par

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Comme

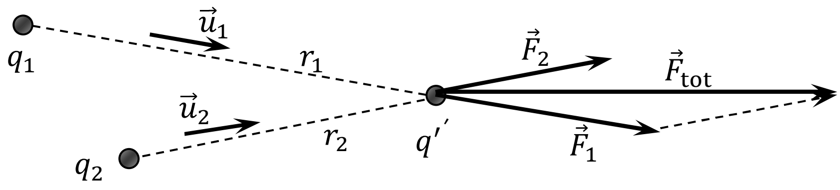
$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z\right) \qquad \text{et} \qquad d\vec{l} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$$

Il vient que

$$\boxed{dV = -\vec{E}\bullet d\vec{l}}$$

III.3. CHAMP ET POTENTIEL CRÉES PAR UNE DISTRIBUTION DE CHARGES

***Principe de superposition* :** Cas de deux charges.
Le principe de superposition est une conséquence de l'addition vectorielle des forces.



$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q'}{r_1^2}\vec{u}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q'}{r_2^2}\vec{u}_2$$

Donc

$$\vec{F}_{\text{tot}} = q'\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right) = q'\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}\vec{u}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}\vec{u}_2\right)$$

Comme

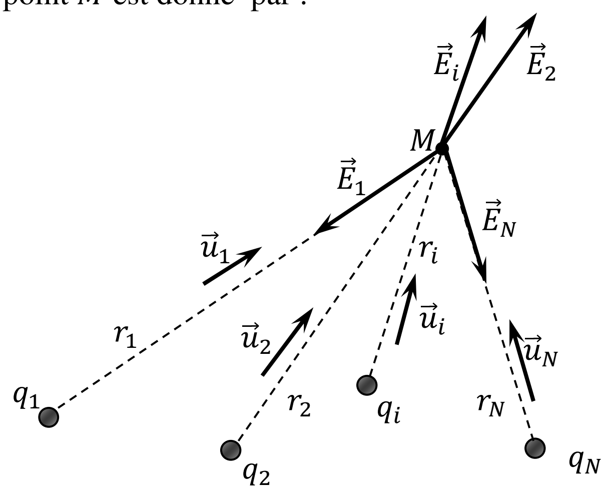
$$\vec{F}_{\text{tot}} = q'.\vec{E}_{\text{tot}}$$

On a donc

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

CHAMP ET POTENTIEL CRÉE PAR UNE DISTRIBUTION DISCRÈTE DE CHARGES :

Le champ et le potentiel électrostatiques crées par un ensemble de charges ponctuelles $q_i \quad (i = 1,2,\dots,N)$ au point M est donné par :



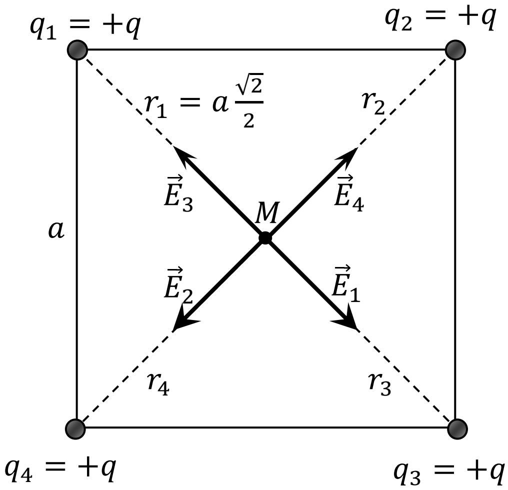
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_i} \quad \text{et} \quad \boxed{V(r) = \sum_{i=1}^{N}V_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}}$$

Tel que r_i est la distance entre la charge q_i et le point M situé dans une direction $\vec{u}_i$ de la charge $(\vec{r}_i = r_i.\vec{u}_i)$.
($\vec{u}_i$ est toujours dirigé de q_i vers le point M).

***Exemple* 01 :**
Soit quatre charges de même valeur q situées sur les sommets d'un carré de côté a .
Trouver le champ et le potentiel électrostatiques crées au point O (centre du carré)

D'après la figure ci-dessous.

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Potentiel :

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_3 = \sum_{i=1}^{N} K\frac{q_i}{r_i}$$

Comme

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = +q$$

Alors

$$V(r) = 4.V_1 = 4.K\frac{q_1}{r_1}$$

Et

$$\boxed{V(r) = 4\sqrt{2}.K\frac{q}{a}}$$

Champ :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = \sum_{i=1}^{N} K\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i \qquad \text{somme vectoreille}$$

En module

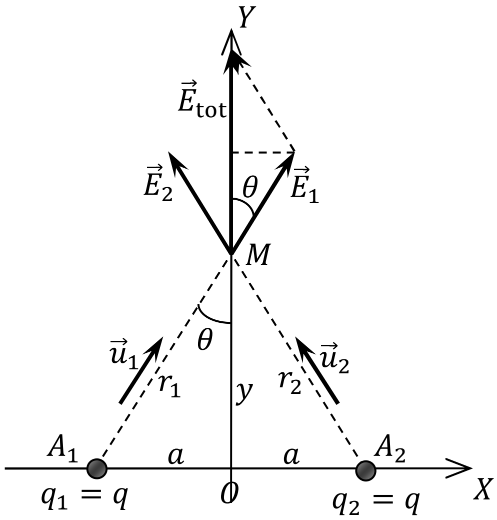
$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = K\frac{q_i}{r_i^2} = 2K\frac{q}{a^2} \qquad (|\vec{u}_i| = 1)$$

Comme $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_3$ sont égaux en module et opposé en direction alors $\vec{E}_1 + \vec{E}_3 = \vec{0}$.
Comme $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_4$ sont égaux en module et opposé en direction alors $\vec{E}_2 + \vec{E}_4 = \vec{0}$.

Finalement

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = \vec{0}}$$

***Exemple* 02 :**
deux charges $q_1 = q_2 = q$ (q est une charge positive) sont placées dans le plan (OXY) suivant les coordonnées respectives : $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$. Calculer le champs et le potentiel électrostatiques crées par ces charges au point $M(0, y)$.



<u>Potentiel :</u>
D'après la figure ci-contre.

$$r_1 = r_2 = \sqrt{a^2 + y^2}$$

Et puisque

$$q_1 = q_2 = q$$

Le potentiel

$$V = V_1 + V_2 = K\frac{q_1}{r_1} + K\frac{q_2}{r_2}$$

Donc

$$\boxed{V = 2K\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2}}}$$

<u>Champ :</u>
<u>*Graphiquement*</u>

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K\frac{q_1}{r_1^2}\vec{u}_1 + K\frac{q_2}{r_2^2}\vec{u}_2 \qquad \text{somme vectoreille}$$

En module

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = K\frac{q_i}{r_i^2} = K\frac{q}{a^2 + y^2} \qquad (|\vec{u}_i| = 1)$$

En projetant sur l'axe OY

$$E = |\vec{E}_{\text{tot}}| = 2|\vec{E}_1|.\cos\theta$$

Or

$$\cos\theta = \frac{y}{r_1} = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

Donc

$$E = 2K\frac{q}{a^2 + y^2}\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \quad \Rightarrow \quad E = 2Kq\frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

Et en vecteur

$$\boxed{\vec{E} = 2Kq\frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\vec{e}_y}$$

<u>*Analytiquement*</u>
Calculons les vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$.

$$\begin{cases} A_1(-a, 0) \\ A_2(a, 0) \\ M(0, y) \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{r}_1 = \overrightarrow{A_1M}\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \overrightarrow{A_2M}\begin{pmatrix} -a \\ y \end{pmatrix} \quad \text{en module} \quad r_1 = r_2 = \sqrt{a^2 + y^2}$$

En remplaçant dans

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K\frac{q_1}{r_1^3}\vec{r}_1 + K\frac{q_2}{r_2^3}\vec{r}_2 = \frac{Kq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} + \frac{Kq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} -a \\ y \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Kq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix} = 2Kq\frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\vec{e}_y}$$

On peut vérifier que :

$$\overrightarrow{grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y$$

Comme

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[2Kq(a^2 + y^2)^{-1/2}\right] = 2Kq\left(-\frac{1}{2}\right)(a^2 + y^2)^{-3/2}2y$$

Donc

$$\overrightarrow{grad}(V) = -2Kq.\,y(a^2 + y^2)^{-3/2}\vec{e}_y$$

Et

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = 2Kq\frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\vec{e}_y}$$

Energie électrique interne d'un ensemble de charges ponctuelles.

U_{syst} est la somme de toutes les énergies potentielles entre charges prises deux à deux (sans répéter la même énergie potentielle deux fois), donc :

$$\boxed{U_{\text{syst}} = \sum_i \sum_j U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}} \qquad (i \neq j)$$

On peut écrire l'énergie potentielle en fonction du potentiel

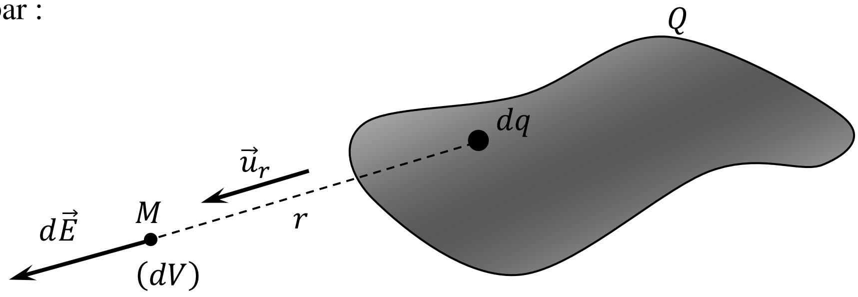
$$V(i) = \sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}} \qquad (i \neq j)$$

$V(i)$ est le potentiel crée au point ou se trouve la charge q_i par le reste des charges.
On alors :

$$\boxed{U_{\text{syst}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i.V(i)}$$

CHAMP ET POTENTIEL CRÉE PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES :

Dans le cas d'une distribution continue, on subdivise le corps chargé en charges infinitésimales dq considérées comme étant des charges ponctuelles. Le champ $d\vec{E}$ et le potentiel dV crées par une charge dq en un point M à une distance r de la charge dans une direction $\vec{u}_r$ sont données par :



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r} \qquad \text{et} \qquad dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

Le champ total crée par le corps chargé est la somme vectorielle (intégrale) des champs infinitésimaux $d\vec{E}$.

$$\boxed{\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^3}\vec{r}}$$

Et le potentiel total crée par le corps chargé est la somme scalaire (intégrale) des potentiels infinitésimaux dV.

$$\boxed{V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}}$$

1- *Cas d'une distribution linéique :*

λ est la densité de linéique de charges $(C.m^{-1})$: $\lambda = \frac{dq}{dl}$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\int \frac{dl}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\lambda\int \frac{dl}{r^3}\vec{r}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\int \frac{1}{r}dl}$$

Dans le cas d'une distribution uniforme $\lambda = Q/L = \text{Constante}$
Dans le cas d'une distribution non uniforme $\lambda \neq \text{Constante}$

Exemple* 01 *:

Soit une distribution uniforme de charges λ en forme d'un demi-cercle de rayon R centrée en O. Calculer l'expression du champ électrostatique crée au point O.

Potentiel :

La distribution est linéaire $dq = \lambda.dl$ et uniforme $\lambda = \text{Constante}$. Donc :

$$V = K\lambda\int \frac{1}{r}dl$$

Comme $r = R = \text{Constante}$

$$V = \frac{K\lambda}{R}\int dl = \frac{K\lambda}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} R.d\theta \qquad \text{avec} \qquad \boxed{dl = R.d\theta} \quad \text{(coordonnées polaires)}$$

D'où

$$\boxed{V = \pi K.\lambda}$$

<u>Champ :</u>
La distribution est linéaire $dq = \lambda.dl$ et uniforme $\lambda = \text{Constante}$. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\lambda \int \frac{dl}{r^2}\vec{u}_r$$

En fait ceci revient à calculer deux intégrales suivant les deux axes OX et OY.(Figure de droite)

$$\begin{cases} dE_x = dE.\cos\theta \\ dE_y = dE.\sin\theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad dE = K\lambda\frac{dl}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En utilisant $r = R = \text{Constante}$ et $dl = R.d\theta$ (coordonnées polaires).

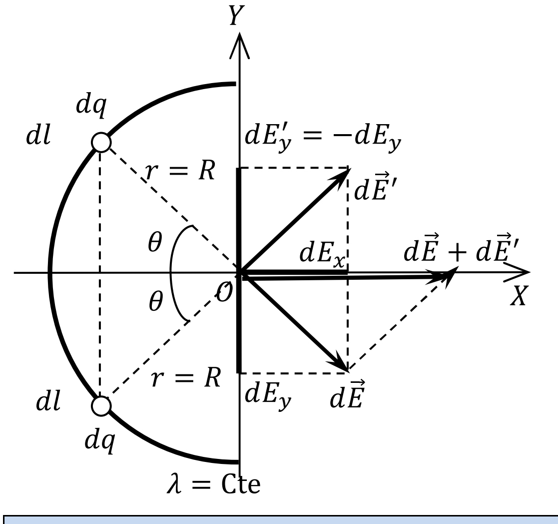
$$dE_x = \frac{K\lambda}{R}\cos\theta\,.d\theta \quad \Rightarrow \quad E_x = \frac{K\lambda}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,.d\theta = \frac{K\lambda}{R}[\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad E_x = 2\frac{K\lambda}{R}$$

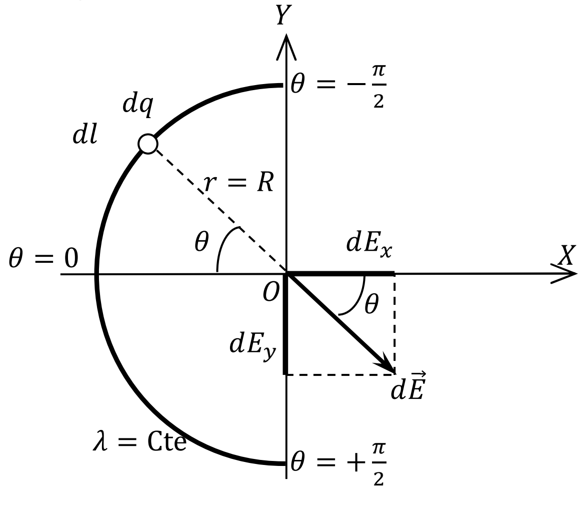
$$dE_y = \frac{K\lambda}{R}\sin\theta\,.d\theta \quad \Rightarrow \quad E_y = \frac{K\lambda}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,.d\theta = \frac{K\lambda}{R}[-\cos\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad E_y = 0$$

Finalement

$$\vec{E} = E_x.\vec{e}_x - E_y.\vec{e}_y \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{E} = 2\frac{K\lambda}{R}\vec{e}_x}$$

On remarque que OX est un axe de symétrie :
La somme vectorielle des champs élémentaires $d\vec{E}$ et $d\vec{E}'$ crées par deux charges symétriques, sera parallèle à l'axe de symétrie OX. D'où, si nous faisons la somme deux par deux des champs crées par chaque charge et la charge qui lui est symétrique, le champ total obtenu sera parallèle à l'axe de symétrie OX. (Figure de gauche).





NOUS UTILISERONS LA REGLE GENERALE SUIVANTE

Le champ électrostatique en un point situé sur un axe de symétrie sera toujours parallèle à l'axe de symétrie.
L'axe de symétrie étant défini par la distribution de charge.

***Exemple* 02 :**
Une distribution de charges λ uniforme et circulaire de rayon R centrée en O est contenu dans le plan (XOY). Trouvez le champ crée par cette distribution en un point se trouvant à une hauteur z au dessus du centre.

Potentiel :
La distribution est linéaire $dq = \lambda.dl$ et uniforme $\lambda = \text{Constante}$. Donc :

$$V = K\lambda \int \frac{1}{r} dl$$

Comme $r = \sqrt{R^2 + z^2} = \text{Constante}$

$$V = \frac{K\lambda}{\sqrt{R^2+z^2}} \int dl = \frac{K\lambda}{\sqrt{R^2+z^2}} \int_0^{2\pi} R.d\theta \qquad \text{avec} \qquad \boxed{dl = R.d\theta} \quad \text{(coordonnées polaires)}$$

D'où

$$\boxed{V = 2\pi.K\lambda \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}}$$

Champ :
Distribution
La distribution est linéaire $dq = \lambda.dl$ et uniforme $\lambda = \text{Constante}$. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\lambda \int \frac{dl}{r^2} \vec{u}_r$$

Symétrie
M se trouve sur l'axe OZ qui est un axe de symétrie $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_z}$

On calcul uniquement la composante suivant OZ.

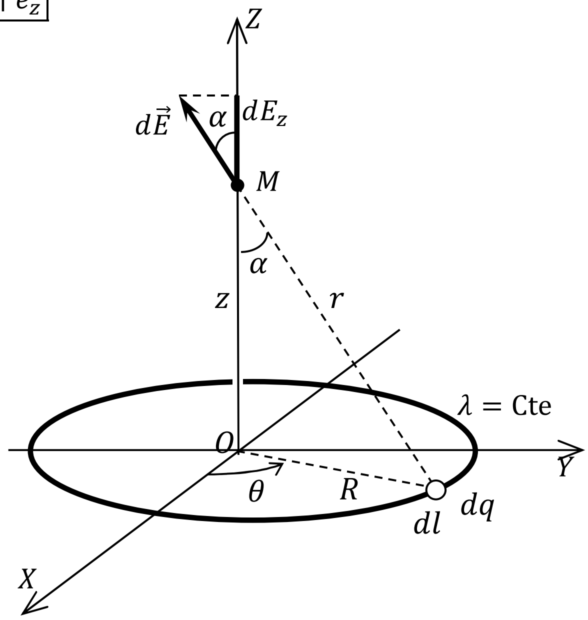
$$dE = K\lambda \frac{dl}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En projetant sur l'axe OZ.

$$dE_z = dE.\cos\alpha = K\lambda \frac{dl}{r^2} \cos\alpha$$

Et

$$E_z = \int dE_z = K\lambda \int \frac{dl}{r^2} \cos\alpha$$



Paramétrage : (Paramètre θ)

$$\begin{cases} dl = R.d\theta \\ r = \sqrt{R^2+z^2} = \text{Constante} \\ \cos\alpha = z/r = z/\sqrt{R^2+z^2} = \text{Constante} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'intégrale, il vient que :

$$E_z = K\lambda \frac{1}{R^2+z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \int_0^{2\pi} R.d\theta$$

Donc

$$E_z = 2\pi.K\lambda \frac{R.z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{E} = 2\pi.K\lambda \frac{R.z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{e}_z}$$

REMARQUE IMPORTANTE

L'utilisation de la symétrie permet de réduire le nombre de composantes du champ électrostatique à calculer.

***Exemple* 03 :**

Calculez le champ électrique crée par une droite infinie ayant une distribution linéaire λ uniforme $(\lambda > 0)$, au point située à une distance h de la droite.

<u>Calcul du champ :</u>

<u>*Distribution*</u>

La distribution est linéaire $dq = \lambda.dl$ et uniforme $\lambda = \text{Constante}$. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\lambda \int \frac{dl}{r^2}\vec{u}_r$$

<u>*Symétrie*</u>

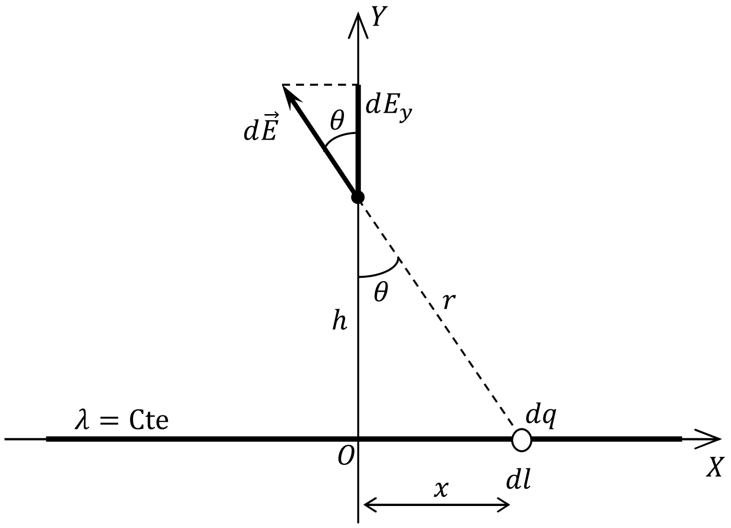
M se trouve sur l'axe OY qui est un axe de symétrie $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_y}$

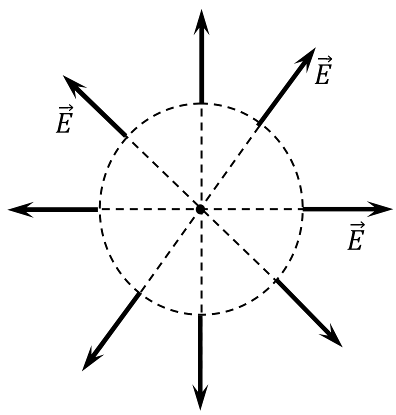
On calcul uniquement la composante suivant OY.

$$dE = K\lambda \frac{dl}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

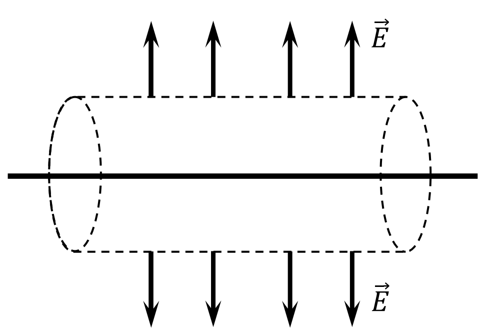
En projetant sur l'axe OY.

$$dE_y = dE.\cos\theta = K\lambda \frac{dl}{r^2}\cos\theta \qquad \text{et} \qquad E_y = \int dE_y = K\lambda \int \frac{dl}{r^2}\cos\theta$$





Symétrie : Vue de côté.



Symétrie : Vue en perspective.

Paramétrage 01 : (Paramètre x)

$$\begin{cases} dl = dx \\ r = \sqrt{x^2 + h^2} \\ \cos\theta = h/r = h/\sqrt{x^2 + h^2} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'intégrale, il vient que :

$$E_y = K\lambda \int \frac{1}{x^2 + h^2} \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}} dx \quad \Rightarrow \quad E_y = K\lambda . h \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + h^2)^{3/2}} dx$$

Cette intégrale se calcule en utilisant un changement de variable ou un changement de paramétrage.

Paramétrage 02 : (Paramètre θ)

$$\begin{cases} dl = dx = (h/\cos^2\theta). d\theta \\ r = h/\cos\theta \\ \cos\theta = \cos\theta \end{cases} \quad \text{car} \quad x = h. \tan\theta \quad \text{et} \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{h}{\cos^2\theta}$$

En remplaçant dans l'intégrale, il vient que :

$$E_y = K\lambda \int \frac{1}{h^2/\cos^2\theta} \frac{h}{\cos^2\theta} \cos\theta \, d\theta \quad \Rightarrow \quad E_y = \frac{K\lambda}{h} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta$$

Ce qui donne

$$E_y = 2\frac{K\lambda}{h} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = 2\frac{K\lambda}{h} \vec{e}_y}$$

Vu la symétrie cylindrique du champ, Nous plaçons la droite chargée suivant l'axe OZ. Dans ce cas

$$\boxed{\vec{E} = 2\frac{K\lambda}{\rho} \vec{e}_\rho}$$

REMARQUE IMPORTANTE

Le paramétrage (comme le changement de variable) n'est pas unique. Nous choisirons le paramétrage qui nous permettra d'obtenir une intégrale facile à calculer.

2- *Cas d'une distribution surfacique :*

σ est la densité surfacique de charge $(C.m^{-2})$: $\sigma = \frac{dq}{ds}$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma \iint \frac{ds}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\sigma \iint \frac{ds}{r^3}\vec{r}} \quad \text{et} \quad \boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma \iint \frac{1}{r}ds}$$

Dans le cas d'une distribution uniforme $\sigma = Q/S =$ Constante
Dans le cas d'une distribution non uniforme $\sigma \neq$ Constante

Exemple :
Soit un disque de rayon R centré en O et placé dans le plan (XOY). Le disque est chargé avec une charge positive distribuée uniformément sur toute sa surface. Trouvez le champ crée par ce disque en un point se trouvant à une hauteur z au dessus du centre.

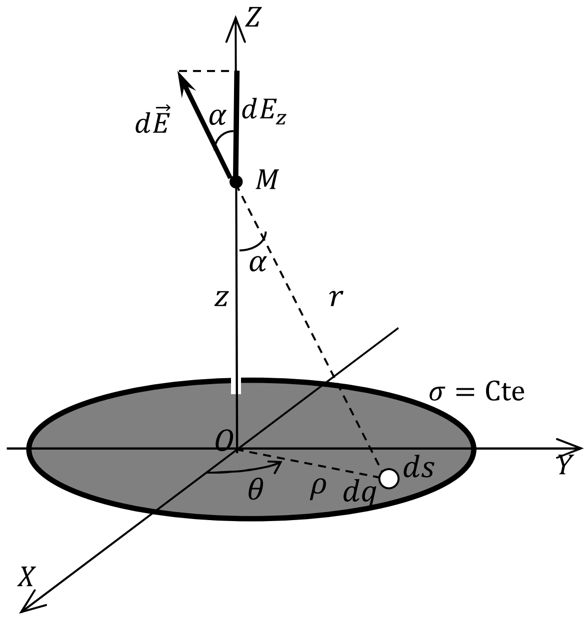
Champ électrostatique :
Distribution
La distribution est surfacique $dq = \sigma.ds$ et uniforme $\sigma =$ Constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\sigma \iint \frac{ds}{r^2}\vec{u}_r$$

Symétrie
M se trouve sur l'axe OZ qui est un axe de symétrie $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_z}$

On calcul uniquement la composante suivant OZ.

$$dE = K\sigma \frac{ds}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$



En projetant sur l'axe OZ.

$$dE_z = dE.\cos\alpha = K\sigma \frac{ds}{r^2}\cos\alpha$$

Et

$$E_z = \int dE_z = K\sigma \iint \frac{ds}{r^2}\cos\alpha$$

Paramétrage : (Paramètre (ρ, θ))

$$\begin{cases} ds = \rho.d\rho.d\theta \\ r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \cos\alpha = z/r = z/\sqrt{\rho^2 + z^2} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'intégrale, il vient que :

$$E_z = K\sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^2 + z^2}\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\rho.d\rho.d\theta = K\sigma.z\left(\int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}d\rho\right).\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)$$

Donc

$$E_z = 2\pi.K\sigma.z\left[\frac{1}{2}\frac{(\rho^2 + z^2)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^R \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = 2\pi.K\sigma\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\vec{e}_z}$$

Dans le cas d'un plan infini chargé avec une même densité σ uniforme.

$$R \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_{\text{plan}} = \pm 2\pi . K\sigma \vec{e}_z} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{E}_{\text{plan}} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z}$$

Tel que le signe $(+)$ correspond à $(z > 0)$ et le signe $(-)$ correspond à $(z < 0)$.

3- ***Cas d'une distribution volumique :***

ρ est la densité volumique de charge $(C.m^{-3})$: $\rho = \frac{dq}{d\tau}$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho \iiint \frac{d\tau}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0} \rho \iiint \frac{d\tau}{r^3} \vec{r}} \quad \text{et} \quad \boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho \iiint \frac{1}{r} d\tau}$$

Dans le cas d'une distribution uniforme $\rho = Q/\tau = \text{Constante}$
Dans le cas d'une distribution non uniforme $\rho \neq \text{Constante}$

III.4. TRAVAIL DE LA FORCE ÉLECTROSTATIQUE

Le travail d'une force entre deux points étant défini par $W_A^B = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l}$

D'où le travail de la force électrique subit par une charge q' qui se déplace dans un champ électrostatique $\vec{E}$ suivant une courbe L est égal à :

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l} = q' \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l} = -q' \int_A^B dV$$

Donc

$$\boxed{W_A^B = -q'.V(B) + q'.V(A) = -U(B) + U(A)}$$

D'où le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivis, mais uniquement des positions initiale et finale de la charge q'.

L'intégrale $\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$ est appelée ***circulation du champ électrostatique*** sur la courbe *L*.

En particulier *la circulation du champ électrostatique sur une courbe fermée est nulle*. En effet :

$$\boxed{\oint \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\oint dV = V(A) - V(A) = 0}$$

IV. DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE

Outils mathématiques :
En utilisant la différentielle totale du potentiel en coordonnées cartésiennes on démontre que :

$$dV = -\vec{E}\bullet d\vec{l}$$

En utilisant la différentielle totale du potentiel en coordonnées polaires on démontre que le gradient en coordonnées polaires est données par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta\right)$$

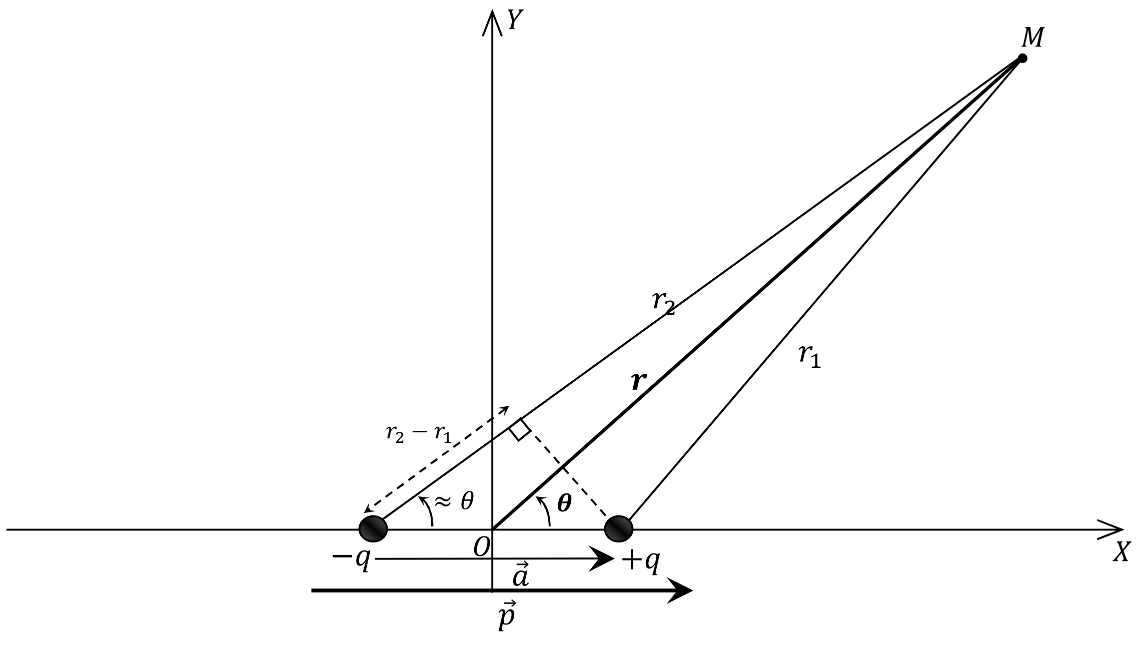
Définition :
Le dipôle électrique est constitué de charges de même valeur q et de signes opposés distant de a (distance interatomique), le moment dipolaire est dirigé de la charge négative vers la charge positive et sa valeur est donnée par :

$$\boxed{\vec{p} = q.\vec{a}}$$

- Molécules polaires (CO, H_2O) et apolaires (CO_2, CH_4, O_2, H_2, gaz rares)
- Intérêt de l'étude du dipôle électrique : physique (polarisation des diélectriques, ferroélectricité, analyse des matériaux …) chimie (analyse des matériaux) électronique (émission et dipôle oscillant, antennes…)
- Applications pratiques : Fours à micro-ondes, détecteurs de pression et de chaleur, transducteurs.

Potentiel crée par un dipôle :

$$V(r) = V_1 + V_2 = Kq\frac{r_2 - r_1}{r_2.r_1}$$



Approximation dipolaire : $\begin{cases} r_2 - r_1 = a.\cos\theta \\ r_2.r_1 = r^2 \end{cases}$

Donc

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p.\cos\theta}{r^2}} \qquad \text{avec} \quad \theta = (\vec{p},\vec{r})$$

Champ crée par un dipôle :

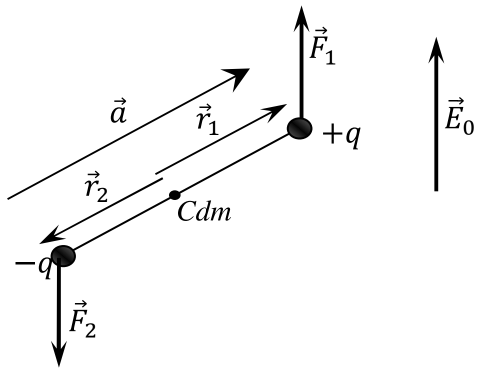
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}(V) = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p.\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p.\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta}$$

Dipôle dans champ électrique uniforme : $\vec{E}_0 = \text{Constante}$

Moment de couple agissant sur le dipôle (⊥ au plan de rotation)

$$\boxed{\vec{C} = \vec{p} \times \vec{E}_0}$$

Positions d'équilibre stable : ($\vec{E}_0 \parallel \vec{p}$ et dans le même sens) $\theta = 0\ rad$
Positions d'équilibre instable : ($\vec{E}_0 \parallel \vec{p}$ et dans des sens opposés) $\theta = \pi\ rad$



Energie potentielle du dipôle

$$\boxed{U = -\vec{p} \times \vec{E}_0}$$

On peut retrouver les positions d'équilibre :
Positions d'équilibre stable : (U est minimale) $\theta = 0\ rad$
Positions d'équilibre instable : (U est maximale) $\theta = \pi\ rad$

V. THÉORÈME DE GAUSS

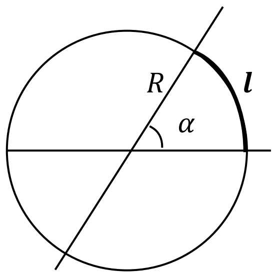
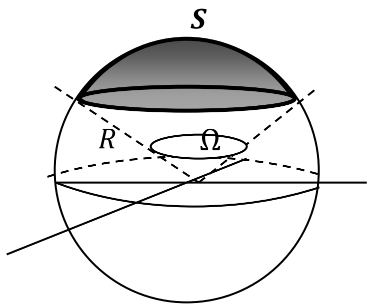
Outils mathématiques :
On définit le vecteur surface élémentaire :

$$d\vec{s}\begin{cases}\text{Module} = \text{surface } ds\\ \text{direction} \perp \text{à la surface } ds\\ \text{Sens : choix arbitraire}\end{cases}$$

Remarque : pour une surface fermée, on choisit, en général, le vecteur $d\vec{s}$ ***sortant***.

On définit l'angle solide par :
L'angle dans l'espace sous lequel on peut voir une surface quelconque S.

Analogie entre l'angle plan et l'angle solide :

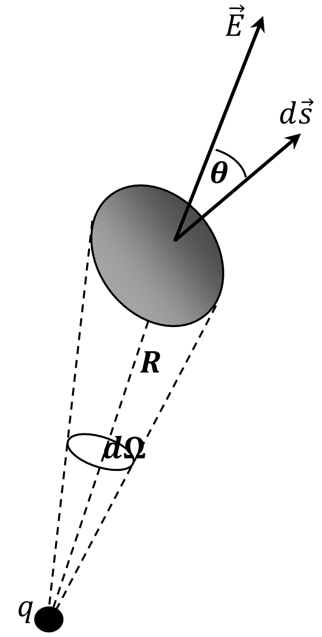
Angle plan	**Angle solide**
La longueur de l'arc de cercle $l = R.\ \ \alpha$ $\alpha(radian)$  	*La surface de la calotte sphérique* $S = R^2.\ \ \Omega$ $\Omega(stéradian)$ 
Pour la circonférence complète du cercle, on trouve l'angle sous lequel on voit tout le plan: $l = 2\pi.R$ $\alpha = 2\pi\ rad$	*Pour la surface complète de la sphère, on trouve l'angle sous lequel on voit tout l'espace:* $S = 4\pi.R^2$ $\Omega = 4\pi\ st$
Pour un angle très petit (infinitésimal) $dl = R.\ \ d\alpha$	*Pour un angle très petit (infinitésimal)* $ds = R^2.\ \ d\Omega$
L'angle sous lequel une courbe dl' *quelconque faisant un angle* θ *avec* dl *:* $dl = dl'.\cos\theta = R.\ \ d\alpha$	*L'angle sous lequel une surface* ds' *quelconque faisant un angle* θ *avec* ds *:* $ds = ds'.\cos\theta = R^2.d\ \ \Omega$

V.1. FLUX DU VECTEUR CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

On définit le flux du champ électrique $\vec{E}$ à travers une surface élémentaire $d\vec{s}$ par la grandeur scalaire :

$$d\Phi = \vec{E} \bullet d\vec{s}$$

Le flux Φ à travers une surface S est donné par l'intégrale :



$$\Phi = \int d\Phi = \iint_S \vec{E} \bullet d\vec{s}$$

$\vec{E}$ est la valeur du champ en tout point ds de la surface S.

Cas d'une charge ponctuelle :

D'après la figure on voit que l'angle entre $\vec{E}$ et $d\vec{s}$ est le même que l'angle entre la surface ds et la surface de la sphère de rayon R centrée en q.

D'où : $d\Phi = \vec{E} \bullet d\vec{s} = E.ds.\cos\theta$

Mais puisque $ds.\cos\theta = R^2.d\ \Omega$ et $E = K\frac{q}{r^2}$

Alors $d\Phi = K.q.d\ \Omega$

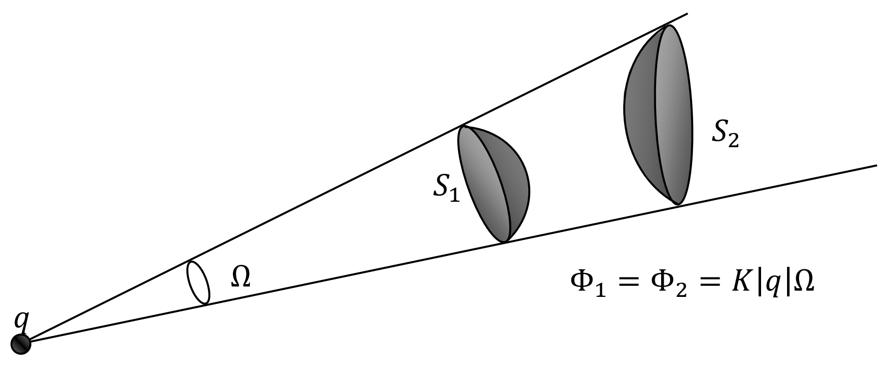
Et pour une surface S : $\boxed{\Phi = K.q.\ \Omega}$

Tel que Ω est l'angle solide sous lequel on voit la surface S à partir de la charge q.

Remarque :

D'après la relation précédente, on remarque que le flux du champ crée par une charge ponctuelle à travers une surface est indépendant de la distance de celle-ci par rapport à la charge, et dépend uniquement de l'angle solide sous lequel on voit cette surface.

Le flux pour deux surfaces observées sous le même angle solide est identique en valeur absolue.

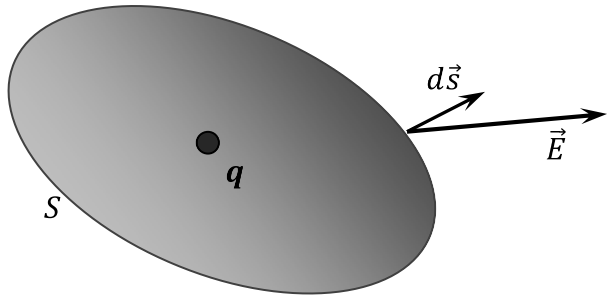


V.2. <u>THÉORÈME DE GAUSS</u>

Le théorème de GAUSS concerne le flux du champ électrique à travers une <u>surface fermée</u>.

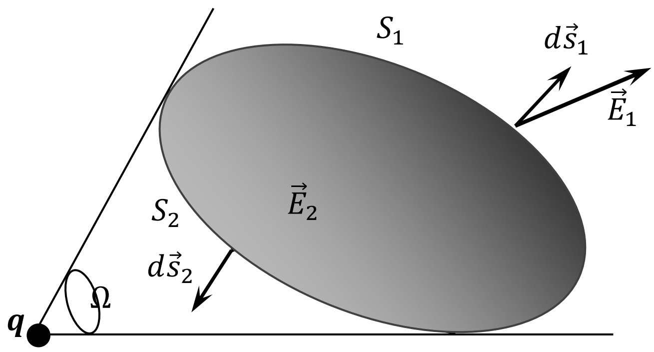
Charge à l'intérieur de la surface :

Pour une charge qui se trouve à l'intérieur d'une surface fermée, l'angle sous lequel on peut voir toute la surface est $\Omega = 4\pi\ stéradian$. D'où : $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$



Charge à l'extérieur de la surface :

Si une charge est située à l'extérieur de S, le flux total du champ électrique crée par cette charge à travers S est nul.



- A chaque élément de surface ds on peut associer un élément ds' vu sous le même angle solide $d\Omega$. Les flux $d\Phi$ et $d\Phi'$ sont égaux en valeur absolue et signes opposées ($d\vec{s}$ orienté vers l'extérieur).
- Ceci est général quelque soit la forme de la surface.
- En intégrant on peut diviser la surface S en deux partie

S_1 où le champs $\vec{E}$ est dirigé suivant $d\vec{s}$ $\Rightarrow$ le flux est positif $\Phi_1 = +Kq.\Omega$

S_2 où le champs $\vec{E}$ est dirigé dans le sens opposé à $d\vec{s}$ $\Rightarrow$ le flux est négatif $\Phi_2 = -Kq.\Omega$

Et le flux total est donné par

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

Cas général :

En présence de plusieurs charges à l'intérieur et à l'extérieur de la surfa ce S. Le flux total est la somme des flux de chaque charge.

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \oiint_S \left(\sum_i \vec{E}_i\right) \bullet d\vec{s} = \sum_i \left(\oiint_S \vec{E}_i \bullet d\vec{s}\right) = \sum_i \Phi_i$$

Puisque le flux des charges extérieur est nul, alors, le flux total est égal au flux des charges à l'intérieur de la surface.

D'où, *le théorème de GAUSS :*

$$\boxed{\Phi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{intérieures}}}{\varepsilon_0}}$$

Remarques :

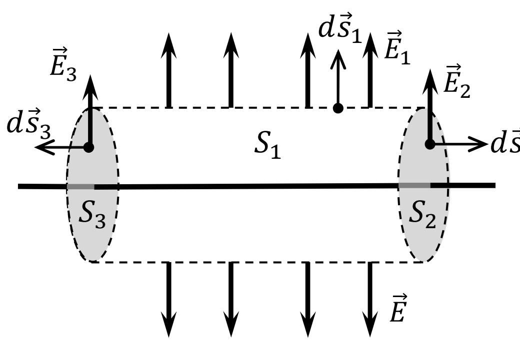
Si le flux est nul, alors il n'y a pas de charges à l'intérieur de la surface de GAUSS, ou la somme algébrique de ces charges est nulle.

« Le flux du champ crée par les charges extérieures est nul » ne veut pas dire que le champ crée par ces charges est nul sur la surface.

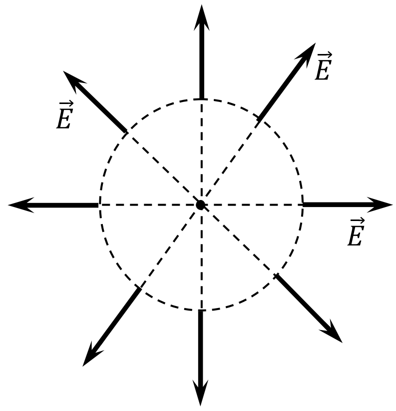
<u>COMMENT APPLIQUER LE THEORÈME DE GAUSS ?</u>

1. Ecrire la relation $\Phi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$
2. Choisir la surface de GAUSS qui respecte la symétrie de la distribution :
   - Soit $\vec{E}$ est parallèle à la surface $\left(\vec{E} \perp d\vec{s}\right) \Rightarrow \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0$
   - Soit $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface ($\vec{E} \parallel d\vec{s}$) **<u>et</u>** $E = \text{Cte} \Rightarrow \iint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = E.S$
3. Calculer les charges q_{int} à l'intérieur de la surface de GAUSS.

***Exemple* 01 :**
Champ électrostatique crée en un point quelconque de l'espace par une droite infinie chargée avec une densité linéique uniforme λ.



Symétrie : Vue en perspective.



Symétrie : Vue de côté.

Théorème de GAUSS : $\oiint_{S_G} \vec{E}\bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Symétrie du champ électrostatique : cylindrique (ou axiale)
Surface de GAUSS : Cylindre S_1 coaxial à la distribution fermé par deux disques S_2 et S_3.
La hauteur du cylindre S_1 est notée h et son rayon r, r est aussi le rayon des deux disques S_2 et S_3.

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\bullet d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1\bullet d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2\bullet d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3\bullet d\vec{s}_3$$

Comme $\vec{E}_2 \perp d\vec{s}_2$ et $\vec{E}_3 \perp d\vec{s}_3$ alors

$$\iint_{S_2} \vec{E}_2\bullet d\vec{s}_2 = \iint_{S_3} \vec{E}_3\bullet d\vec{s}_3 = 0$$

Et comme $\vec{E}_1 \parallel d\vec{s}_1$ et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\bullet d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1\bullet d\vec{s}_1 = \iint_{S_1} E_1 . ds_1$$

En plus, en utilisant la symétrie de translation le long de la droite chargée et la symétrie de rotation avec comme axe de rotation la droite chargée, nous trouvons que $E_1 = \text{Constante}$ sur la surface S_1. Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\bullet d\vec{s} = E_1 \iint_{S_1} ds_1 = E_1 . S_1$$

Nous obtenons donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\bullet d\vec{s} = E_1 . 2\pi . r . h$$

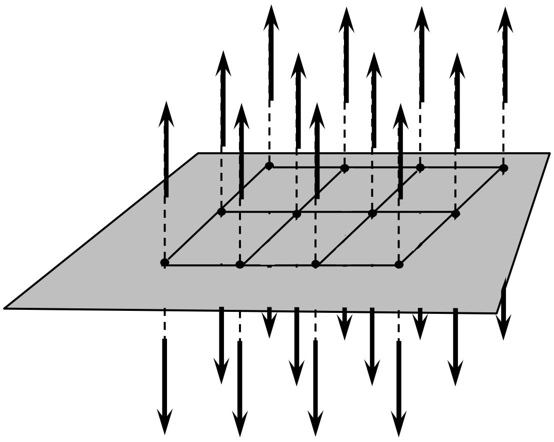
Calcul de la charge intérieure :
Distribution linéaire uniforme $\quad dq = \lambda . dl \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = \int dq = \lambda \int_{\text{int}} dl \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = \lambda . h$

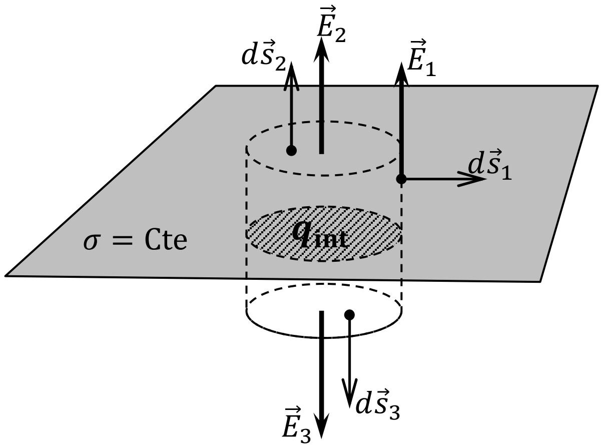
En remplaçant, nous trouvons

$$E_1 . 2\pi . r . h = \frac{\lambda . h}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{2K . \lambda}{r}}$$

Résultat que nous avons précédemment trouvé avec le calcul d'intégrale.

***Exemple* 02 :**
Champ électrostatique crée en un point quelconque de l'espace par un plan infini chargée avec une densité surfacique uniforme σ.





Théorème de GAUSS : $\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Symétrie du champ électrostatique : Plane.
Surface de GAUSS : Cylindre S_1 dont l'axe est perpendiculaire à la distribution fermé par deux disques S_2 et S_3. La hauteur du cylindre S_1 est notée h et son rayon r, r est aussi le rayon des deux disques S_2 et S_3.

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \bullet d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \bullet d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \bullet d\vec{s}_3$$

Comme $\vec{E}_1 \perp d\vec{s}_1$ alors

$$\iint_{S_1} \vec{E}_1 \bullet d\vec{s}_1 = 0$$

Et comme $\vec{E}_2 \parallel d\vec{s}_2$ et $\vec{E}_3 \parallel d\vec{s}_3$ et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_2} \vec{E}_2 \bullet d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \bullet d\vec{s}_3 = \iint_{S_2} E_2 . ds_2 + \iint_{S_3} E_3 . ds_3$$

En plus, en utilisant la symétrie de translation le long d'une la droite parallèle au plan chargé et la symétrie de part et d'autre du plan chargé, nous trouvons que $E_2 = E_3 = E = \text{Constante}$ (en module) sur les surfaces S_2 et S_3. Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E \iint_{S_2} ds_2 + E \iint_{S_3} ds_3 = E.(S_2 + S_3)$$

Nous obtenons donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E.2.\pi r^2$$

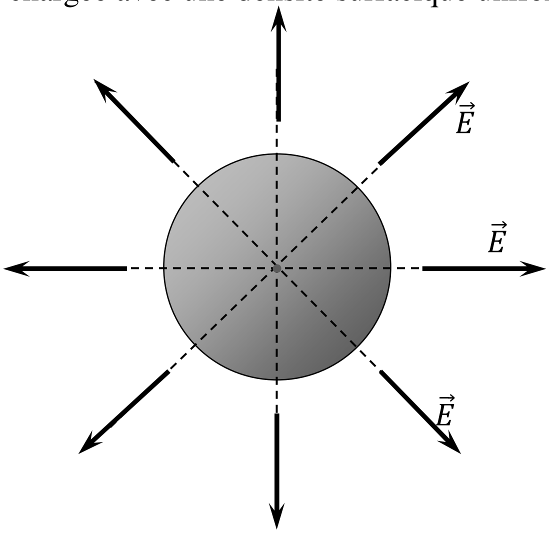
Calcul de la charge intérieure :
Distribution surfacique uniforme $\quad dq = \sigma . ds \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = \int dq = \sigma \int_{\text{int}} ds \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = \sigma . \pi r^2$

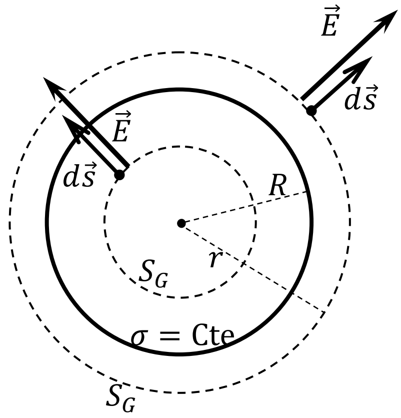
En remplaçant, nous trouvons

$$E.2.\pi r^2 = \frac{\sigma . \pi r^2}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z}$$

Résultat que nous avons précédemment trouvé avec le calcul d'intégrale.

***Exemple* 03 :**
Champ électrostatique crée en un point quelconque de l'espace par une sphère « creuse » chargée avec une densité surfacique uniforme σ (rayon R).





Théorème de GAUSS : $\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Symétrie du champ électrostatique : Sphérique.
Surface de GAUSS : Sphère concentrique à la distribution de rayon r.

Comme $\vec{E} \parallel d\vec{s}$ et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_G} E.ds$$

En plus, en utilisant la symétrie de rotation par rapport au centre de la sphère chargée, nous trouvons que $E = \text{Constante}$ (en module) sur la surface de GAUSS S_G . Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E \iint_{S_G} ds = E.S_G$$

Nous obtenons donc :

$$\boxed{\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E.4\pi.r^2}$$

<u>*Ce résultat est toujours valable pour une distribution à symétrie sphérique.*</u>

Calcul de la charge intérieure :
<u>A l'intérieur de la sphère chargée $0 \leq r \leq R$:</u>
Distribution surfacique uniforme $\quad dq = \sigma.ds \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = \int dq = \sigma \int_{\text{int}} ds \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = 0$
En remplaçant, nous trouvons

$$E.4\pi.r^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E_{\text{int}} = 0}$$

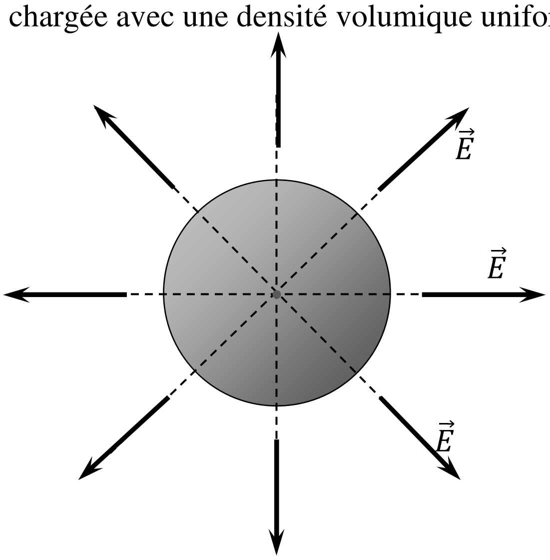
<u>A l'extérieur de la sphère chargée $R \leq r < +\infty$:</u>
Distribution surfacique uniforme

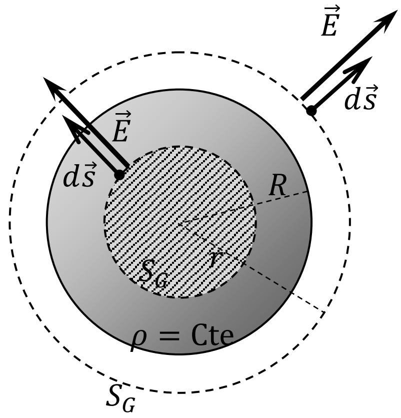
$$dq = \sigma.ds \qquad \Rightarrow \qquad \sum q_{\text{int}} = \int dq = \sigma \int_{\text{int}} ds \qquad \Rightarrow \qquad \sum q_{\text{int}} = Q = \sigma.4\pi.R^2$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E.4\pi.r^2 = \frac{\sigma.4\pi.R^2}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E_{\text{ext}}(r) = \frac{\sigma.R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{E_{\text{ext}}(r) = K\frac{Q}{r^2}}$$

***Exemple* 04 :**
Champ électrostatique crée en un point quelconque de l'espace par une sphère « pleine » chargée avec une densité volumique uniforme ρ (rayon R).





Théorème de GAUSS : $\oiint_{S_G} \vec{E}\bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Symétrie du champ électrostatique : Sphérique.
Surface de GAUSS : Sphère concentrique à la distribution de rayon r.

Comme $\vec{E} \parallel d\vec{s}$ et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\bullet d\vec{s} = \iint_{S_G} E.ds$$

En plus, en utilisant la symétrie de rotation par rapport au centre de la sphère chargée, nous trouvons que $E = \text{Constante}$ (en module) sur la surface de GAUSS S_G . Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E}\bullet d\vec{s} = E \iint_{S_G} ds = E.S_G$$

Nous obtenons donc :

$$\boxed{\oiint_{S_G} \vec{E}\bullet d\vec{s} = E.4\pi.r^2}$$

Calcul de la charge intérieure :
<u>A l'intérieur de la sphère chargée $0 \le r \le R$:</u>
Distribution volumique uniforme

$$dq = \rho.d\tau \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = \int dq = \rho \int_{\text{int}} d\tau \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = \rho.\frac{4\pi}{3} r^3$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E.4\pi.r^2 = \frac{\rho.4\pi.r^3}{3.\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{\text{int}}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r}$$

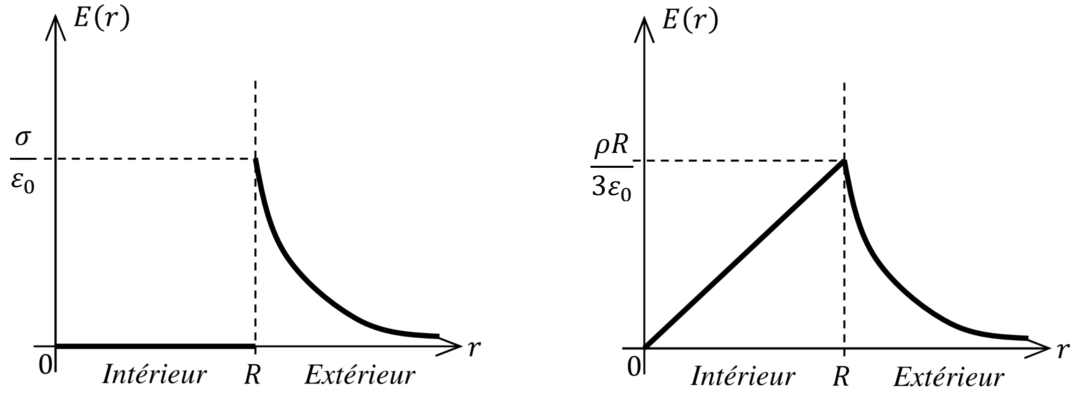
<u>A l'extérieur de la sphère chargée $R \le r < +\infty$:</u>
Distribution surfacique uniforme

$$dq = \rho.d\tau \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = \int dq = \rho \int_{\text{int}} d\tau \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = Q = \rho.\frac{4\pi}{3} R^3$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E.4\pi.r^2 = \frac{\rho.4\pi.R^3}{3.\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{\text{ext}}(r) = \frac{\rho.R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{E_{\text{ext}}(r) = K\frac{Q}{r^2}}$$

Représentation du champ $E(r)$ en fonction de r (sphère creuse et sphère pleine).



<u>Calcul du potentiel électrostatique $V(r)$ dans le cas d'une symétrie sphérique.</u>

$$dV = -\vec{E}\bullet d\vec{l}$$

Dans le cas d'une symétrie sphérique $\vec{E}(\vec{r}) = E(r).\vec{e}_r$ et

$$dV = -E.dr \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(r) = -\int E(r).dr}$$

<u>Sphère creuse (densité surfacique uniforme σ)</u>

$$\begin{cases} E_{\text{int}} = 0 \\ E_{\text{ext}}(r) = \dfrac{\sigma.R^2}{\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{\text{int}} = -\displaystyle\int E_{\text{int}}.dr \\ V_{\text{ext}} = -\displaystyle\int E_{\text{ext}}(r).dr \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} V_{\text{int}} = C_1 \\ V_{\text{ext}}(r) = \dfrac{\sigma.R^2}{\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} + C_2 \end{cases}$$

C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration, que nous déterminons en utilisant les conditions limites.

Dans le cas d'une distribution finie $V(r \to +\infty) = 0$

$$\frac{\sigma.R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{+\infty} + C_2 = 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

Continuité en $r = R$.

$$V_{\text{int}}(r = R) = V_{\text{ext}}(r = R) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \sigma.R/\varepsilon_0$$

Finalement

$$\boxed{V_{\text{int}} = \frac{\sigma.R}{\varepsilon_0} = \text{Constante}} \quad \text{et} \quad \boxed{V_{\text{ext}}(r) = \frac{\sigma.R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

Ou

$$\boxed{V_{\text{int}} = K\frac{Q}{R} = \text{Constante}} \quad \text{et} \quad \boxed{V_{\text{ext}}(r) = K\frac{Q}{r}}$$

Sphère pleine (densité volumique uniforme ρ)

$$\begin{cases} E_{\text{int}}(r) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r \\ E_{\text{ext}}(r) = \dfrac{\rho . R^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{\text{int}} = -\displaystyle\int E_{\text{int}} . dr \\ V_{\text{ext}} = -\displaystyle\int E_{\text{ext}}(r) . dr \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} V_{\text{int}} = -\dfrac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C_1 \\ V_{\text{ext}}(r) = \dfrac{\rho . R^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{1}{r} + C_2 \end{cases}$$

C_1 et C_2 (constantes d'intégration) sont calculées à partir des conditions limites.

- Dans le cas d'une distribution finie $V(r \to +\infty) = 0$

$$\frac{\rho . R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{+\infty} + C_2 = 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

- Continuité en $r = R$.

$$V_{\text{int}}(r = R) = V_{\text{ext}}(r = R) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + C_1 = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

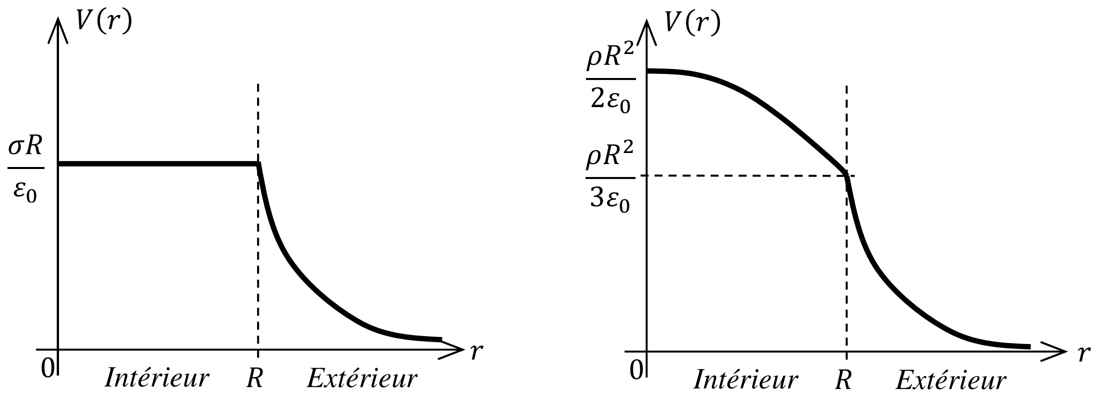
Finalement

$$\boxed{V_{\text{int}} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(-r^2 + 3 . R^2)} \quad \text{et} \quad \boxed{V_{\text{ext}}(r) = \frac{\rho . R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r}}$$

Ou

$$\boxed{V_{\text{int}} = \frac{1}{2} K \frac{Q}{R}\left(-\frac{r^2}{R^2} + 3\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{V_{\text{ext}}(r) = K \frac{Q}{r}}$$

Représentation du champ $V(r)$ en fonction de r (sphère creuse et sphère pleine).



REMARQUE IMPORTANTE
Dans le cas d'une distribution à symétrie sphérique.

1. La surface de GAUSS est une sphère concentrique à la distribution.

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E . 4\pi . r^2$$

   Reste à calculer la charge à l'intérieur de la surface de GAUSS.
2. Pour calculer le potentiel.

$$V(r) = -\int E(r) . dr$$

3. Les constantes d'intégration sont calculées à partir des conditions limites :
   - Condition à l'infini $V(r \to +\infty) = 0$ (dans le cas d'une distribution finie).
   - Condition de continuité.