Solutions TD Algèbre 2 « Séries 2 et 3 » (Pour les étudiants 1ère année MI)(MOKHTARI)

Série N° 1

Exercice N°1 : u : IR^3 ---- > IR² ;u(x) =u(x_1, x_2, x_3) =(x_1+ x_2+ x_3 , $2x_1$+ x_2 - x_3),x= (x_1, x_2, x_3)/ ξ de IR^3 où ξ est la base canonique de IR^3 1) u est linéaire si : u(x +Y) = u(x) + u(y) ∀ x∈ IR^3 et ∀ y∈ IR^3 et u(λx) = λu(x) ∀ x∈ de IR^3 et ∀λ∈ IR : u(x +y)= u(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = u(z_1,z_2, z_3)= (z_1+z_2+ z_3, $2z_1$+z_2- z_3) =((x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3),2 (x_1+y_1)+(x_2+y_2)-(x_3+y_3)) comme chaque composante du couple et dans IR alors u(z_1,z_2, z_3)=((x_1+ x_2+ x_3) +(y_1+y_2+y_3), ($2x_1$+ x_2- x_3) +(2 y_1+y_2-y_3)) =u(x) +u(y) et u(λx) = u((λx_1, λx_2, λx_3)) =(λx_1+ λx_2+ λx_3, 2λx_1+ λx_2- λx_3) = (λ(x_1+ x_2+ x_3), λ($2x_1$+ x_2 - x_3)) = λu(x) ∀ x∈ IR^3 et ∀ y∈ IR^3 et∀λ∈ IR

Ker(u) = { x= (x_1, x_2, x_3)∈ IR^3/ u(x) = 0_{IR^2}} , déjà montrer que ker(u) est un sev : soit x = (x_1, x_2, x_3) ∈ ker(u) alors u(x) =(x_1+ x_2+ x_3 , $2x_1$+ x_2 - x_3) = (0,0) => x_1+ x_2+ x_3 =0 **et** $2x_1$+ x_2 - x_3=0
ker(u) ={ x= (x_1, x_2, x_3)∈ IR^3/(x_1+ x_2+ x_3 , $2x_1$+ x_2 - x_3) = (0,0)}=
= { x= (x_1, x_2, x_3)∈ IR^3/ x_1+ x_2+ x_3 =0 **et** $2x_1$+ x_2 - x_3=0} = {α(2, -3,1)/α ∈ IR}= { αw/α ∈ IR} w est une base de ker(u) , donc dim (ker) = 1

Exercice N°2 : f : IR^3 ---- > IR² ;f(x) =f(x_1, x_2, x_3) =(x_1+ x_2+ x_3 , -x_1+ $2x_2$ +2 x_3),x= (x_1, x_2, x_3)/β de IR^3 où β est la base canonique de IR^3 ,β = { e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)} etβ' = { f_1=(1,0),f_2=(0,1) est la base canonique de IR²
1) f linéaire le même raisonnement que l'exo 1
2) ker(f) = { x= (x_1, x_2, x_3)∈ IR^3/f(x) = 0_{IR^2}} ={ x= (x_1, x_2, x_3)∈ IR^3/(x_1+ x_2+ x_3 , -x_1+2 x_2+2 x_3) = (0,0)}
Soit x = (x_1, x_2, x_3) ∈ ker(f) alors f(x) =(x_1+ x_2+ x_3 , $2x_1$+ x_2 - x_3) = (0,0) => x_1+ x_2+ x_3 =0 **et**
-x_1+2 x_2 + x_3=0 ;ker(f) = {α(0,1,-1)/α ∈ IR}= { αv/α ∈ IR}, v est une base de ker(f) et dim(ker(f) =1
comme dim(IR^3) = dim(kerf + dim Im(f) (thèorème) alors dim [Im(f)] = 2

Pour la base , on peut utiliser la proposition suivante : f E---> F linéaire(E et F de K esv de dimensions finies alors l'image d'une génératrice de E est une génératrice de im(f)= f(E) pour la preuve : Soit $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots n\}}$ génératrice de E alors $(f(\{e_i\})_{i \in \{1, \dots n\}}$ est une génératrice de f (E) = Im(f) en effet : Soit w∈ Im(f) = { w =f(v)/ v∈ E}alors

W = f(v) , comme $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots n\}}$ génératrice de E alors ∃ $\{\beta_i\}_{i \in \{1, \dots n\}}$ K tel que v = $\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$; w= f(v) = f($\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$) comme f est linéaire alors w= β_1f(e_1)+ β_2f(e_2)+ …+ β_n fe_n) ∀w∈E = > $(f(\{e_i\})_{i \in \{1, \dots n\}}$ est une génératrice de f (E), alors revenons à l'exercice B = {f(e_1), f(e_2), f(e_3) } est une génératrice de Im(f) pour déterminer la base il suffit de voir parmi ces trois vecteurs 2 vecteurs linéairement indépendants (rang(B) expliquer en TD) ; {f(e_1) =(1, -1) , f(e_2)= 1, 2), f(e_3)=(1, 2})alors les vecteurs linéairement indépendants sont { f(e_1) , f(e_2)} donc c'est une base (ce n'est pas l'unique)
Exercice N°3 : Même raisonnement que l'exo N°2 : seulement f : IR^3 ---- > IR^3 est un endomorphisme : f(x) =f(x_1, x_2, x_3) =(x_1-x_3 , $2x_1$+ x_2 -3 x_3, -x_2+2 x_3),x= (x_1, x_2, x_3)/β de IR^3 où β est la base canonique de IR^3 {f(e_1) =(1, 2,0) , f(e_2)=(0 ,1,-1), f(e_3)=(-1,-3, 2)

Ker(f) = {(0,0,0)} **d'après un théorème vu cours** : f est injectif , dim(ker(f)) = 0 f est surjectif d'où f est automorphisme , dim im(f) =3 = IR^3 et B= { f(e_1) , f(e_2), f(e_3)} est une base

Exercice N°4 :

u : IR^4 ---- > IR^4 ;u(x) =u(x_1, x_2, x_3, x_4) =(x_1- x_2+ x_3 ,0, x_1+ x_2 - x_3 +x_4, x_4),x= (x_1, x_2, x_3, x_4)/ ξ de IR^4 où ξ est la base canonique de IR^4, ker(u) = {α(0,1,1,0))/α ∈ IR}= { αv/α ∈ IR} , v est une base de Ker(u) dim(ker(u) = 1 , {f(e_1) =(1, 0,1,0) , f(e_2)=(- 1,0,1,0), f(e_3)=(1, 0,-1,0), f(e_4)=(0, 0,1,1)} est une génératrice de Im(u) comme dim (Imf) = 3, α f(e_1) +β f(e_2)+ f(e_3)γ =0 = > α=β=γ= 0alors {f(e_1) =, f(e_2), f(e_3)}est une base de Im(u) , on ker(u) +im(u) sev de IR^4 si ker(u) ∩ Im(u) = {0} à verifier alors ker(u)⊕ +im(u) = IR^4 (v ∈ ker(u) ∩ Im(u) = >v∈Ker(u) et v∈ Im(u) donc v= t(0,1,1,0)=α f(e_1)+β f(e_2)+ f(e_3)γ) , on trouve que v = {0_{IR^4}}

E ={ (x_1, x_2, x_3, x_4)∈ IR^4/ x_1+ x_2 - x_3 +x_4 = 0} , E sev déjà vu en TD

E = {α(1,0,1,0) +β(0,1,1,0}+γ(0,0,1,1)/ α∈IR, β ∈IR,γ∈IR}= {αu_1 +β u_2+γ u_3/ α∈IR, β ∈IR,γ∈IR } , on remarque que ker(u) ∩ E ={(0,1,1,0} d'où IR^4 n'est pas une somme directe de ker(u) et E

Exercice N°5 : Même travail que l'exo N°4

Série N° 3:

Exercice 6

L'ensemble des matrices pour la loi « + » est un groupe commutatif par contre pour la loi produit de deux matrices n'est pas un groupe (non commutatif) , les lois interne « + » et externe « . »(produit d'une matrice par un scalaire donnent à l'ensemble des matrices une structure d'espace vectoriel :

Pour pouvoir faire le produit de deux matrices il faut que le nombre de colonnes de la première soit égal aux nombres de lignes de la $2^{ème}$

Comment faire le produit : Soit A = $(a_{ij})_{i\in\{1,\dots p\},j\in\{1,\dots q\}}$ et B = $(b_{ij})_{i\in\{1,\dots q\},j\in\{1,\dots n\}}$ alors AB =$(c_{ij})_{i\in\{1,\dots p\},j\in\{1,\dots n\}}$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}$ pour $i\in\{1,\dots p\},j\in\{1,\dots n\}$ exp : $c_{11} = \sum_{k=1}^{q} a_{1k}b_{k1}$, $c_{34} = \sum_{k=1}^{q} a_{3k}b_{k4}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x1+1x(-2) & 2x2+1x(-4) \\ 2x1+1x(-2) & 2x2+1x(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$ on remarque $AB \neq BA$ (non mmutatif)

$CD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ calculer DC et comparer

Calculer AE mais EA est impossible

Exercice 7 :

A= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = AxA = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2xA = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^3 - A^2 + A - I_3 = (0)$ matrice nulle alors $A(A^2 - A + I) = I_3$ ceci imlique que A est inversible d'inverse $A^{-1} = A^2 - A + I$, $A^4 = A^3.A = (A^2 - A + I_3)A = A^3 - A^2 + A = A^2 - A + I_3 - A^2 + A = I_3$

Exercice 8 : f : IR^2 ---- > IR^2 ;f(x) =u(x_1, x_2) =(x_1- x_2 , x_1+ x_2),x= (x_1, x_2)/ β de IR^2 où β ={e_1,e_1}est la base canonique de IR^2

1- f un endomorphisme (linéaire voir série 2)

2) pour déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de IR^2 il suffit d'écrire l'mage de β dans la base β ={ e_1= (1,0),e_2=(0,1)} , f(e_1)= (1, 1) = 1 e_1+ 1 e_2, f(e_2)= (-1, 1) = -1 e_1+ 1 e_2

A = M(f,β) = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,la 1ère colonne correspond à f(e_1), la 2ème colonne correspond à f(e_2)

Exercice 9 : f : IR^3 ---- > IR^3 :u(x) =u(x_1, x_2, x_3) =(x_2-2x_3 , 2x_1- x_2 +4 x_3, x_1 -x_2+3 x_3),x= (x_1, x_2, x_3)/β de IR^3 où β est la base canonique de IR^3

1){u(e_1) =(0, 2,1) , u(e_2)=(1 ,-1,-1),u(e_3)=(-2,4,3)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) $\ker(u - id)$ = { x= (x_1, x_2, x_3)∈ IR^3/(u- id)(x) = 0_{IR^2}} ={ x= (x_1, x_2, x_3)∈ IR^3/(A- I_3)(x) =(0)} ,

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$v \in \ker(u - id) \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$\ker(u - id)$={α(1,1,0)+β(-2,0,1)/α ∈ IR, β ∈ IR }= { αa + β b/α ∈ IR, β ∈ IR }

3) $\ker(u) = \{ x = (x_1, x_2, x_3) \in IR^3 / u(x) = 0_{IR^3} \} =$

$\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in IR^3 / (x_1 - 2x_3 , 2x_1 - x_2 + 4 x_3, x_1 - x_2 + 3 x_3) = (0,0,0)\} = \{\alpha(-1,2,1)/\alpha \in IR\} = \{ \alpha c/\alpha \in IR\}$,

$\beta' = \{a,b,c\}$ est une base de IR^3, il suffit de montrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants :

$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0 \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$,

5) $D = M(u, \beta')$, il faut écrire les images dela base β' dans β' :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6) $Im(u) = Ker(u - id)$,en effet : Soit $v \in Ker(u\text{-}id)$ alors $(u - id)v = 0 \implies u(v) - v = 0$

$\Rightarrow u(v) = v \Rightarrow v \in Im(u) = \{ w = u(v)/v \in IR^3\}$ et de plus $\dim(\ker(u\text{-}id) = \dim(im(u) = 2$

($\dim(u) = \dim(IR^3) - \dim(\ker(u))$ d'où $\ker(u\text{-}id) = Im(u))$

Montrer que $\ker(u) \cap \ker(u\text{-}id) = \{ O\}$ et $\ker(u) + \ker(u\text{-}id) = Ker(u) + Im(u)$et c'est sev de IR^3 , $Ker(u) \oplus Im(u) = IR^3$