Solutions des exercices (série 3)

Billal Lekdim

29/04/2020

[redacted]

Exercise 1 I. avec les condition aux limites $u(t,0)=0$ **et** $u(t,l)=0$.

la résolution de ce problème est identique à celui que l'on a résolu dans le cours pour l'équation de la chaleur. La solution est la suivante :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{l}\right]^2 t\right).$$

Il reste donc à vérifier la condition initiale ($u(x,0)=ax$):

$$ax=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l ax\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \\
&= \left[\frac{-2}{n\pi}ax\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]_0^l + \frac{2}{n\pi}a\underbrace{\int_0^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx}_{=0} \\
&= \frac{-2al}{n\pi}\cos(n\pi) \\
&= \frac{2al}{n\pi}(-1)^{n+1}, \qquad n=1,2,\ldots
\end{aligned}$$

La valeur de la température dans la position 1 et le temps est donnée par :

$$u(x,t)=2al\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{l}\right]^2 t\right).$$

II. avec les condition aux limites $u_x(t,0)=0$ **et** $u_x(t,l)=0$.

On recherche une solution de la forme (on sépare les variables x et t) :

$$u(t,x)=X(x)T(t).$$

Nous remplaçons cette expression dans l'EDP (1), *O obtient :*

$$\frac{1}{c^2}XT^{'} = X^{''}T.$$

On divise par le produit XT, *on trouve*

$$\frac{1}{c^2}\frac{T^{'}}{T} = \frac{X^{''}}{X} = -\lambda \qquad (\lambda \text{ est une constante quelconque})$$

Encore une fois, les variables sont bien séparables car elles se trouvent de chaque coté de l'égalité.

On est alors amené à résoudre les problèmes suivant :

♣ *problème aux valeurs propres (Sturm-Liouville) sur la variable x (car les conditions aux frontières homogènes se trouvent sur cette variable) :*

$$\begin{cases} X^{''}(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où il faut rechercher toutes valeurs propres λ_n et les fonctions propres $X_n(x)$.

♣♣ *équation différentielle du 1^{er} ordre sur la variable t :*

$$T^{'}(t) + \lambda_n c^2 T(t) = 0 \tag{2}$$

Résolution du problème aux valeurs propres

$$X^{''} + \lambda X = 0 \qquad l'\text{équation caractéristique est} \qquad r^2 + \lambda = 0$$

Le discriminant de l'équation caractéristique est $\triangle = -4\lambda$

Cas 1 : *Si* $\triangle = 0$ *soit* $\lambda = 0$.

La solution s'écrit $X(x) = Ax + B$,

$X'(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$ *et* $X'(l) = 0 \Longrightarrow A = 0$.

Par conséquent, la solution du problème (1) s'écrit

$$X(x) = A_0,$$

où A_0 est une constante arbitraire.

Cas 2 : *Si* $\triangle > 0$ *soit* $\lambda < 0$. *Donc* $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$.

La solution s'écrit

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

$X'(0) = 0 \Longrightarrow A - B = 0$ *soit* $A = B$

$X'(l) = 0 \Longrightarrow \sqrt{-\lambda}A(e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l}) = 2\sqrt{-\lambda}A\sinh(\sqrt{-\lambda}a) = 0$ *comme* $\sqrt{-\lambda} \neq 0, \quad \sinh(\sqrt{-\lambda}a) \neq 0$ *et donc* $A = 0$.

Par conséquent, $\lambda < 0$ *ne sont pas des valeurs propres.*

Cas 3 : *Si* $\triangle < 0$ *soit* $\lambda > 0$. *Donc* $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$.

La solution s'écrit

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

$X'(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$ *et* $X'(l) = 0 \Longrightarrow A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$. *Une solution non triviale de l'équation* $(B \neq 0)$ *correspond à :*

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \quad \textit{avec} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Par conséquent,$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ *sont les valeurs propres du problème aux limites (1). Les fonctions propres associées aux valeurs propres* λ_n *s'écrivent :*

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

où A_n *sont des constantes arbitraires.*

♣♣ *Résolution de l'équation différentielle (2) :*

$$T^{'}(t) + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 T(t) = 0.$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit :

$$T(t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

où $C_n, n = 0, 1, 2, \ldots.$ *sont deux constantes arbitraires.*

Solution générale de l'EDP :

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles est la superposition de l'ensemble des solutions (la somme de toutes les solutions $u_n(t,x)$*) :*

$$u(t,x) = \sum X_n(x) T_n(t).$$

En associant les coefficients $A_n C_n$ *entre eux, nous obtenons la solution générale de l'EDP :*

$$u(t,x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t}.$$

Solution particulière de l'EDP :

La solution générale doit vérifier la condition initiale :

$$u(0,x) = ax.$$

Donc

$$ax = A_0 + \sum A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Il reste donc à calculer les coefficients A_0 et A_n en décomposant $f(x)$ sur la base des fonctions propres :

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l ax dx = \frac{al}{2}$$

et

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l ax\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \\
&= \underbrace{\left[\frac{2}{n\pi}ax\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]_0^l}_{=0} - \frac{2}{n\pi}\int_0^l a\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \\
&= \frac{2la}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]_0^l \\
&= 2la\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}, \qquad \forall n = 1,2,3,\dots.
\end{aligned}$$

La valeur de la température en fonction de x et du temps t est alors donnée par la fonction suivante :

$$u(t,x) = \frac{al}{2} + 2la\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t}.$$

Exercise 2 1. *La température à l'équilibre.*

Nous cherchons une température $u(t,x) = v(x)$ qui ne dépend que de la position x, ce qui remplacé dans l'équation (2) :

$$-c^2 v''(x) = P \tag{3}$$

avec les conditions aux limites $v(0) = V(L) = 0$. On intégre deux fois l'EDO (3), on obtient

$$v(x) = \frac{p}{2c^2}x(l-x).$$

2. On suppose $w(t,x) = u(t,x) - v(x)$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v''.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -c^2 v'' \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = P.
\end{aligned}$$

Pour les conditions aux limites, on a

$$\begin{aligned} u(t,0) &= 0 \quad \text{et } v(0) = 0 \implies w(t,0) = 0, \\ u(t,l) &= 0 \quad \text{et } v(l) = 0 \implies w(t,l) = 0. \end{aligned}$$

Pour la condition initiale, on a

$$w_0(x) = w(0,x) = u(0,x) - v(x) = -v(x) = -\frac{p}{2c^2}x(l-x).$$

En utilisant la méthode de séparation des variables pour resoudre le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0, \\ w\left(t,0\right) = 0 \quad \text{et} \quad w\left(t,l\right) = 0, \qquad t \ge 0, \\ \qquad w\left(0,x\right) = w_0(x), \qquad x\epsilon\left[0,l\right]. \end{array} \right. \tag{4}$$

Nous avons donc mis l'équation sous la forme de celle de l'exercice 1. la résolution de ce problème est identique à celui de l'exercice 1. La solution est la suivante :

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

Il faut maintenant réaliser la condition initiale $w(0,x) = w_0(x)$. Pour cela on cherche les coefficients c_n tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = w_0\left(x\right),$$

on trouve

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{l}\int_0^l w_0\left(x\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{p}{c^2 l}\int_0^l x(l-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{2Pl^2}{c^2\left(n\pi\right)^3}\left(1-\left(-1\right)^n\right) \end{aligned}$$

Enfin, la solution du problème (4) est :

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \frac{2Pl^2}{c^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\left(-1\right)^n\right)}{n^3} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ &= \frac{2Pl^2}{c^2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\left(-1\right)^n\right)}{\left(2n-1\right)^3} e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\left(2n-1\right)\pi x}{l}\right), \end{aligned}$$

4. En déduire l'expression de u. On a $w(t,x) = u(t,x) - v(x)$ donc

$$u(t,x) = w(t,x) + v(x).$$
$$= \frac{2Pl^2}{c^2\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{(2n-1)^3} e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2n-1)\,\pi x}{l}\right) + \frac{p}{2c^2} x(l-x).$$

Pouvait-on appli-quer la méthode de séparation des variables directement sur le problème de départ ? Justifiez votre réponse.

On ne pouvait pas appliquer directement la méthode de séparation des variables directement sur le problème de départ, parce qu'avec le second membre non nul, nous ne pouvons pas séparer les variables x et t comme nous l'avons fait avec le problème (4).