FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE.

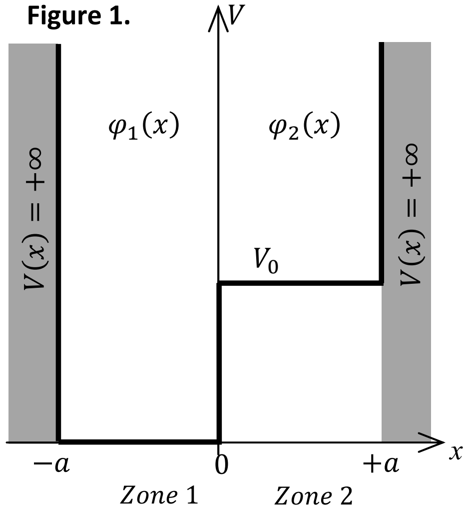
DURÉE : 01 Heure 30 Minutes.

EXERCICE 01: (10 points)

Soit une particule de masse m dans un potentiel de la forme (figure 1.) :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in [-a, 0] \\ V(x) = V_0 & \text{pour} \quad x \in [0, +a] \\ V(x) = +\infty & \text{ailleur} \end{cases}$$

Figure 1.



Dans le cas où $E > V_0$.

1. Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps et en déduire les solutions générales dans chaque zone.
2. En écrivant les conditions de continuité en $x = -a$ et en $x = 0$, écrire les fonctions d'ondes en fonction d'une seule constante d'intégration (A_1).
3. En écrivant la condition de continuité en $x = +a$, trouver la condition de quantification de l'énergie.
4. Que devient la condition de quantification dans le cas où $(V_0 = 0)$?
5. Montrer à partir de la question 2. que dans le cas où $(V_0 = 0)$ nous retrouvons $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.
6. Calculer, alors (pour $V_0 = 0$), la constante A_1.

EXERCICE 02: (10 points)

Le potentiel de l'oscillateur harmonique est donné par :

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

m étant la masse la particule et ω une constante positive.
On propose la solution suivante de l'équation de Schrödinger :

$$\psi(x) = A.x.e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

1. Calculer la valeur de la constante A pour que la fonction $\psi(x)$ soit normée.
2. En utilisant l'équation de Schrödinger indépendante du temps, trouver l'énergie E qui correspond à l'état $\psi(x)$.
3. Calculer les valeurs moyennes de la position $\langle X \rangle$ et de l'impulsion $\langle P \rangle$ de la particule se trouvant dans l'état $\psi(x)$.
4. Calculer la valeur moyenne $\langle X^2 \rangle$ et en déduire la valeur moyenne de l'énergie potentielle $\langle V \rangle$.
5. A partir des questions 2 et 4, trouver l'énergie cinétique moyenne $\langle T \rangle$ puis en déduire la valeur moyenne $\langle P^2 \rangle$.
6. Calculer les écarts quadratiques ΔX et ΔP. Que peut-on en déduire ?

On donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a.x^2} dx = \sqrt{\pi}/a^{1/2}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a.x^2} dx = \sqrt{\pi}/2a^{3/2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-a.x^2} dx = 3\sqrt{\pi}/4a^{5/2}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{(2n+1)} e^{-a.x^2} dx = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$