FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

# ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 40 Minutes.

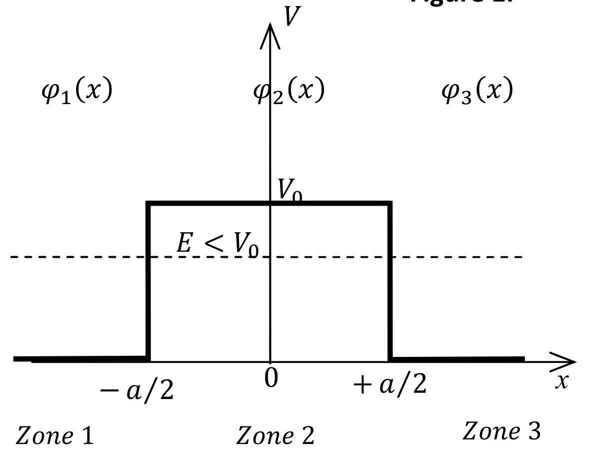
**EXERCICE 01: (10 points)**

Soit une particule ayant un potentiel de la forme

$$\begin{cases} V(x) = V_0 & x \in [-a/2, +a/2] \\ V(x) = 0 & \text{ailleur} \end{cases}$$

1. Ecrire l'équation de Schrödinger correspondant à chaque domaine de $x$.
2. En déduire les solutions de ces équations dans le cas d'une particule ayant une énergie $E < V_0$ et provenant de $x = -\infty$.
3. Calculer le coefficient de transmission défini par le rapport de la densité de probabilité de l'onde transmise sur la densité de probabilité de l'onde incidente $T = |A_3|^2/|A_1|^2$.
4. A.N. : $E = 1\,eV$ , $V_0 = 2\,eV$ , $a = 1$ Å. Dans le cas d'un électron puis d'un proton.
   $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\ kg$ ; $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\ kg$

Figure 1.




**EXERCICE 02: (10 points)**

Le potentiel de l'oscillateur harmonique est donné par : $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$m$ étant la masse la particule et $\omega$ une constante positive.

On donne les deux premiers états associés aux deux premiers niveaux d'énergies de l'oscillateur harmonique par les fonctions d'ondes

$$\psi_0(x) = A_0 . e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \quad ; \quad \psi_1(x) = A_1 . x . e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

1. Trouver les expressions de $A_0$ et $A_1$ pour que les états $\psi_0(x)$ et $\psi_1(x)$ soient normés.
2. Montrer que les états $\psi_0(x)$ et $\psi_1(x)$ sont orthogonaux.
3. Trouver les énergies $E_0$ et $E_1$ des états $\psi_0(x)$ et $\psi_1(x)$.
4. Calculer les valeurs moyennes de la position $\langle X \rangle_0$ et $\langle X \rangle_1$ pour une particule se trouvant dans les états $\psi_0(x)$ et $\psi_1(x)$.
5. Calculer la valeur moyenne $\langle X^2 \rangle_0$ pour une particule se trouvant dans l'état $\psi_0(x)$ et en déduire la valeur moyenne de l'énergie potentielle $\langle V \rangle_0$.
6. Montrer que la valeur moyenne de l'Hamiltonien d'une particule se trouvant dans l'état $\psi_0(x)$ est $\langle H \rangle_0 = E_0$.
7. Déduire des deux questions précédentes la valeur moyenne de l'énergie cinétique $\langle T \rangle_0$ puis la valeur moyenne du carré de l'impulsion $\langle P^2 \rangle_0$.

On donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a.x^2} dx = \sqrt{\pi}/a^{1/2}$ ; $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a.x^2} dx = \sqrt{\pi}/2a^{3/2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-a.x^2} dx = 3\sqrt{\pi}/4a^{5/2} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{(2n+1)} e^{-a.x^2} dx = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$