FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

ÉPREUVE SEMESTRIELLE

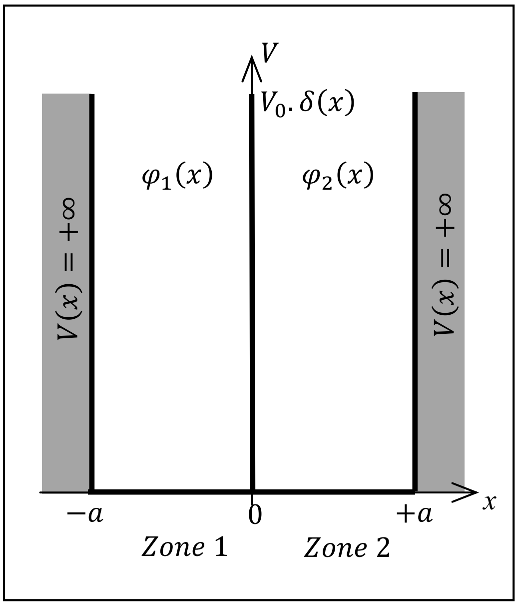
MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 45 Minutes.

EXERCICE 01: (10 points)

Soit une particule ayant le potentiel représenté dans le figure ci-contre et dont l'expression est donnée par :

$$\begin{cases} V(x) = V_0.\delta(x) & x \in [-a,+a] \\ V(x) = +\infty & \text{ailleur} \end{cases}$$



Tel que $\delta(x)$ est la fonction delta de Dirac.

1. Ecrire l'équation de Schrödinger correspondant à chaque domaine (zone) de x. En déduire les solutions en ondes planes de ces équations dans le cas d'une particule ayant une énergie $(E > 0)$ en explicitant le module du vecteur d'onde k en fonction de la masse de la particule m et de son énergie E.
2. En intégrant l'équation de Schrödinger indépendante du temps entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ et en faisant tendre ε vers 0. Montrer que la dérivée première de la fonction d'onde présente une discontinuité en $(x = 0)$ égale à :

$$\left.\frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right|_{x=0} - \left.\frac{d\varphi_1(x)}{dx}\right|_{x=0} = \rho_0.\varphi_1(0)$$

   Tel que ρ_0 est une constante à déterminer.
3. En utilisant la continuité de la fonction d'onde en $(x = -a)$ et en $(x = 0)$, et la discontinuité de la dérivée première trouvée en 2, écrire toutes les constantes d'intégration en fonction de $A_1.\exp(-ika)$ et des constantes k, a, ρ_0. (A_1 est l'amplitude de l'onde plane se propageant dans le zone 1 vers les x croissants)
4. En écrivant la continuité de la fonction d'onde en $(x = +a)$, trouver la condition de quantification du module du vecteur d'onde k.

EXERCICE 02: (10 points)

1. Définir les opérateurs position X et l'opérateur quantité de mouvement P_x dans l'espace des fonctions d'ondes.
2. Calculer les commutateurs $[X, P_x]$ et $[X, P_x^2]$.
3. Sachant que les opérateurs X et P_x sont hermétiques. Parmi les opérateurs suivants, quels sont les opérateurs hermétiques : P_x^2 , XP_x , XP_x^2 ?

Une fonction d'onde est de la forme

$$\begin{cases} \psi(x) = A.(a^2 - x^2) & \text{pour} \quad x \in [-a,+a] \\ \psi(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in \,]-\infty,-a] \cup [+a,+\infty[\end{cases}$$

4. Normaliser la fonction d'onde et préciser la valeur de A en fonction de a.
5. Calculer les valeurs moyennes de la position $\langle X \rangle$ et de la quantité de mouvement $\langle P_x \rangle$.
6. Calculer les valeurs de moyennes $\langle X^2 \rangle$ et $\langle P_x^2 \rangle$.
7. En déduire les écarts quadratiques moyens ΔX et ΔP_x.
8. Le principe d'incertitude de Heisenberg est-il vérifié ?