FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 30 Minutes.

EXERCICE 01: (10 points)

Considérons un électron confiné dans une boite de potentiel à une dimension de largeur $a = 2\,nm$ et définie par :

$$\begin{cases} V(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in [0, a] \\ V(x) = +\infty \qquad\qquad \text{ailleur} \end{cases}$$

1. En écrivant l'équation de Schrödinger indépendante du temps, trouver la fonction d'onde $\varphi_n(x)$ et l'énergie E_n de l'électron dans la boite de potentiel.
2. Que peut-on dire de l'énergie de l'électron.
3. Tracez un schéma de l'état stationnaire $\varphi_3(x)$ puis de la densité de probabilité $|\varphi_3(x)|^2$.
4. Quelles sont les positions les plus probables pour trouver l'électron dans cet état ?
5. Si l'électron passe du niveau $n = 4$ au niveau $n = 2$, quelle est la longueur d'onde du photon émis lors de cette transition?
6. Quel est le nombre d'état stationnaires ayant une énergie inférieure à $E = 100\ eV$?
7. Trouver alors l'expression de la densité d'état $D(E) = dn(E)/dE$, définie comme étant le nombre d'états compris entre une énergie E et $E + dE$ par unité d'énergie dE.

Constantes : $\hbar = 1{,}054\,752 \times 10^{-34}\ J.s$; $m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}\ kg.$

EXERCICE 02: (10 points)

On donne la fonction d'onde $\varphi(x)$ d'une particule sous la forme

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 & \text{pour} \quad x \leq 0 \\ \varphi(x) = N.x.\exp(-ax) & \text{pour} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Normaliser la fonction d'onde et préciser la valeur de la constante N en fonction de a.
2. Calculer les valeurs moyennes de la position $\langle X \rangle$ et de la quantité de mouvement $\langle P_x \rangle$ dans l'état normé $\varphi(x)$.
3. Calculer les valeurs de moyennes $\langle X^2 \rangle$ et $\langle P_x^2 \rangle$ dans l'état $\varphi(x)$.
4. En déduire les écarts quadratiques moyens ΔX et ΔP_x.
5. Le principe d'incertitude de Heisenberg est-il vérifié ?

Dans le cas où la particule serait soumise au potentiel

$$\begin{cases} V(x) \to +\infty & \text{pour} \quad x \leq 0 \\ V(x) = -\dfrac{C}{x} & \text{pour} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

C est une constante positive.

6. Exprimer a en fonction de m, C et $\hbar$ pour que $\varphi(x)$ soit solution de l'équation de Schrödinger de la particule dans ce potentiel $(x \geq 0)$.
7. En déduire, en fonction de m, C et $\hbar$, l'énergie E de la particule dans cet état.

On donne : $$\int_0^{+\infty} x^n.\exp(-ax).dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$