FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 30 Minutes.

EXERCICE 01: (10 points)

Soit une particule de masse m dans une boite de potentiel unidimensionnelle (suivant l'axe (OX)) définit par :

$$V(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \left[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right] \quad ; \quad V(x) = +\infty \quad \text{sinon}$$

1. En utilisant l'équation de Schrödinger, montrer que les fonctions d'ondes $\psi_n(x)$ des états stationnaires associés à la particule s'écrivent
$$\psi_n(x) = \left(\sqrt{2/a}\right).\sin\left(n\frac{\pi}{a}x + n\frac{\pi}{2}\right)$$
2. Déterminer l'énergie E_n associée à chaque état stationnaire $\psi_n(x)$ de la particule.
3. Que peut-on dire de l'énergie de la particule ?
4. Montrer que les états $\psi_n(x)$ sont orthonormés.
5. Calculer les valeurs moyennes $\langle P_x \rangle$ et $\langle P_x^2 \rangle$ pour un état $\psi_n(x)$. Tel que P_x est l'opérateur quantité de mouvement suivant (OX). Commenter.

On donne : $2.\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ et $2.\sin\alpha.\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

EXERCICE 02: (10 points)

La fonction d'onde correspondant à l'état fondamental de l'électron dans l'atome d'hydrogène ψ_{1s}, et l'énergie E_{1s} correspondant à cet état sont données par :

$$\psi_{1s}(r) = N.\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \quad ; \quad E_{1s} = -\frac{Ke^2}{2a_0} \quad \text{avec} \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e K e^2}$$

1. Déterminer la constante de normalisation N.
2. Montrer que la valeur moyenne de l'Hamiltonien H pour l'état ψ_{1s} est égal à $\langle H \rangle = E_{1s}$.
3. Calculer l'énergie cinétique moyenne $\langle T \rangle$ de l'état fondamental.
4. En déduire, en utilisant la relation $H = T + V$, la valeur moyenne de l'énergie potentielle $\langle V \rangle$ et la valeur moyenne de l'inverse de la distance électron–noyau $\langle 1/R \rangle$.
5. Calculer la valeur moyenne de l'opérateur position radiale $\langle R \rangle$.
6. En utilisant cette fonction d'onde, calculer la probabilité de présence dans une sphère de rayon $(2a_0)$. Le résultat est-il physiquement acceptable ?

On donne : Le Laplacien en coordonnées sphériques

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2.\tan\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2.\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Et l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^n.\exp(-a.x).dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$