FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

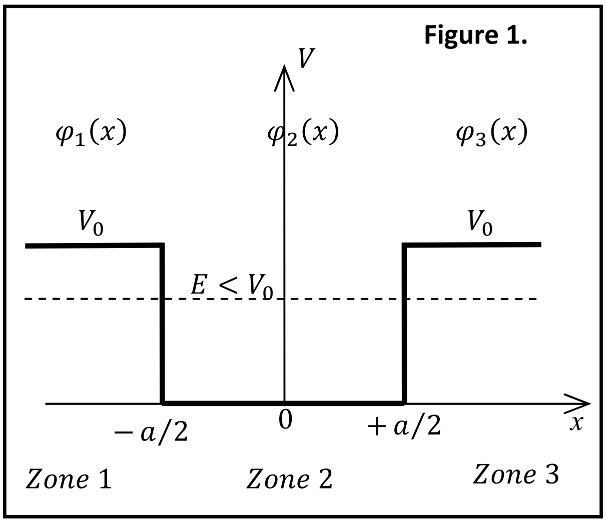
MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 30 Minutes.

EXERCICE 01: (08 points)

Soit une particule de masse m dans un potentiel de la forme (figure 1.) :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in [-a/2, +a/2] \\ V(x) = V_0 & \text{ailleur} \end{cases}$$



Dans le cas où $E < V_0$.

1. Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps et en déduire les solutions générales dans chaque zone (éliminer les ondes amplifiées qui ne sont pas de carré sommable).
2. En écrivant les conditions de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée en $x = -a/2$ et la continuité de la fonction d'onde en $x = +a/2$, écrire les fonctions d'ondes en fonction d'une seule constante d'intégration (A_1).
3. En écrivant la condition de continuité de la dérivée première de la fonction d'onde en $x = +a/2$, trouver la condition de quantification de l'énergie.

EXERCICE 02: (08 points)

Le potentiel de l'oscillateur harmonique est donné par : $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

m étant la masse la particule et ω une constante positive.

On propose la solution suivante de l'équation de Schrödinger :

$$\psi(x) = A.e^{-ax^2}$$

1. Calculer la valeur de la constante A en fonction de a pour que la fonction $\psi(x)$ soit normée.
2. Calculer les valeurs moyennes de la position $\langle X \rangle$ et de l'impulsion $\langle P_x \rangle$ de la particule se trouvant dans l'état $\psi(x)$.
3. Calculer les valeurs de moyennes $\langle X^2 \rangle$ et $\langle P_x^2 \rangle$ dans l'état $\psi(x)$.
4. Calculer les écarts quadratiques ΔX et ΔP. Que peut-on en déduire ?
5. En remplaçant $\psi(x)$ dans l'équation de Schrödinger, exprimer a en fonction de m, ω et $\hbar$.
6. En déduire, en fonction de ω et $\hbar$, l'énergie E de la particule dans cet état.

On donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta.x^2}dx = \sqrt{\pi/\beta}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-\beta.x^2}dx = 0$; $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\beta.x^2}dx = \sqrt{\pi/4\beta^3}$.

EXERCICE 03 : (04 points)

Soit Q et P deux opérateurs hermétiques vérifiant la loi de commutation $[Q, P] = i$. On pose :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) \quad \text{et} \quad H = \hbar\omega_0\left(aa^+ - \frac{1}{2}\right)$$

Tel que a^+ est l'adjoint de l'opérateur a . $\hbar$ et ω_0 sont des réels positifs.

1. Calculer l'opérateur adjoint a^+ de l'opérateur a . L'opérateur a est-il hermétique ?
2. Montrer que $[a, a^+] = 1$.
3. Montrer que l'opérateur H est hermétique.
4. En utilisant la propriété de la question 2, calculer les commutateurs $[a, H]$ et $[a^+, H]$.