FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE.

EXERCICE 01: (10 points)

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{pour } \; x \in [0, a] \\ V(x) = +\infty & \text{ailleur} \end{cases}$$

1. Fonction d'onde et énergie.

Equation de Schrödinger : $(V = 0)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = E.\varphi(x)$$

La solution est de la forme :

$$\varphi(x) = A.e^{+ikx} + B.e^{-ikx} \qquad \text{avec} \qquad k = \sqrt{2mE/\hbar^2} \qquad \text{ou} \qquad E = \hbar^2 k^2/2m$$

Condition de continuité en $x = 0$: $\varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A + B = 0$ et $A = -B$

En remplaçant dans la fonction d'onde : $\varphi(x) = A.2i.\sin(k.x)$

Condition de continuité en $x = a$: $\varphi(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad A.2i.\sin(k.a) = 0$

Donc $\boxed{k = n\pi/a}$ où n est un entier naturel non nul.

La constante A est calculée à partir de la condition de normalisation.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2.dx = 4|A|^2 \int_0^a \sin^2(k.x).dx = 1$$

Donc

$$4|A|^2 \int_0^a \sin^2(k.x).dx = 2|A|^2 \int_0^a (1 - \cos(2k.x)).dx = 1$$

En intégrant et en utilisant $(k = n\pi/a)$.

$$2|A|^2 \left[x - \frac{\sin(2k.x)}{2k}\right]_0^a = 2|A|^2 a = 1$$

On trouve alors

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{2a}} \qquad \Rightarrow \qquad A = |A|.e^{i\phi} = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{i\phi}$$

Et la fonction d'onde. $\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}e^{i\left(\phi+\frac{\pi}{2}\right)}.\sin(k.x)$

$e^{i(\phi+\pi/2)}$ est un facteur de phase constant qui n'influe pas sur le module de $\varphi(x)$, donc il n'influe pas sur la probabilité de présence, d'où la fonction d'onde peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}.\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)}$$

Et en remplaçant k dans l'expression de l'énergie on trouve

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m.a^2}n^2}$$

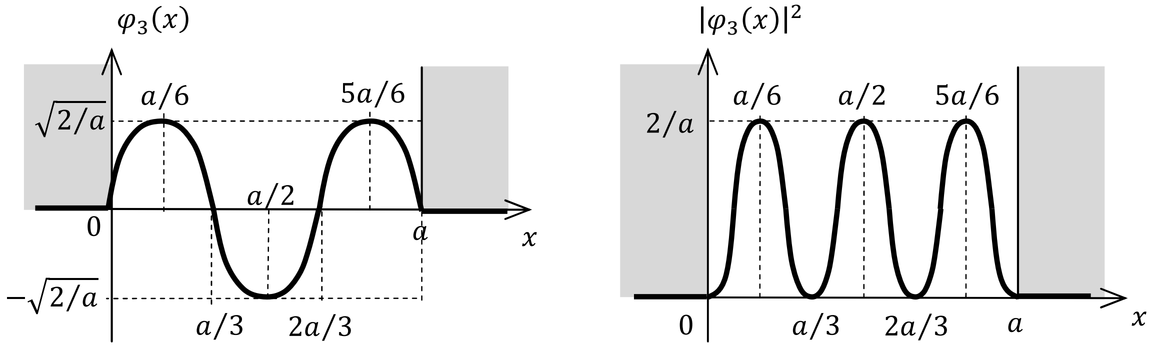
2. On dit que l'**énergie** de l'électron dans la boite de potentiel est **quantifiée**.

3. Amplitude et densité de probabilité.

$$\varphi_3(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\varphi_3(x)|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{3\pi}{a}x\right)}$$

Cette densité est nulle aux points

$$3\pi . x = p\pi . a \quad \Rightarrow \quad x = 0, \frac{a}{3}, \frac{2a}{3}, a$$



4. La probabilité de présence est maximale dans les domaines au voisinage des maxima de la densité de probabilité, c'est-à-dire :

$$\sin^2\left(\frac{3\pi}{a}x\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3\pi}{a}x = (2p+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \boxed{x = (2p+1)\frac{a}{6}} \qquad \left(x = \frac{a}{6}, \frac{a}{2}, \frac{5a}{6}\right)$$

5. Longueur d'onde du photon émis.

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m.a^2}n^2 = 0{,}09391.n^2\ (eV)$$

$$\Delta E = E_4 - E_2 = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{hc}{E_4 - E_2} = \frac{2m.a^2c}{h}\frac{1}{16-4}} \quad \text{AN} \quad \boxed{\lambda = 10{,}998 \times 10^{-7}\ m}$$

6. Nombre d'état stationnaires ayant une énergie inférieure à $E = 100\ eV$.

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m.a^2}n^2 = 0{,}09391.n^2\ (eV) = 100\ eV$$

Or

$$\sqrt{100/0{,}09391} = 32{,}63$$

D'où le plus grand nombre entier donnant une énergie inférieur à 100 eV est

$$\boxed{n = 32}$$

Et c'est le nombre d'états ayant tous une énergie inférieure à 100 eV.

7. Le nombre d'états ayant une énergie inférieur à une énergie E donnée.

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m.a^2}n^2 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{2\sqrt{2m}.a}{h}\sqrt{E}$$

D'où, la densité d'état

$$\boxed{D(E) = \frac{dn(E)}{dE} = \frac{\sqrt{2m}.a}{h}\frac{1}{\sqrt{E}}}$$

EXERCICE 02 : (10 points)

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 & \text{pour} \quad x \leq 0 \\ \varphi(x) = N.x.\exp(-ax) & \text{pour} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Normalisation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x).\varphi(x).dx = 1 \quad \Rightarrow \quad N^2 \int_0^{+\infty} x^2.e^{-2ax} dx = 1$$

En utilisant

$$\int_0^{+\infty} x^n.\exp(-ax).dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

D'où

$$\boxed{N = 2.a^{3/2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(x) = 2a^{3/2}x.\exp(-ax)} \quad \text{pour} \quad x \geq 0$$

2. Valeurs moyennes $\langle X \rangle$ et $\langle P \rangle$

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x).X\varphi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x).x.\varphi(x).dx$$

Donc

$$\langle X \rangle = N^2 \int_0^{+\infty} x^3.e^{-2ax} dx = 4a^3 \frac{3!}{(2a)^4}$$

Et

$$\boxed{\langle X \rangle = \frac{3}{2}\frac{1}{a}}$$

Impulsion

$$\langle P_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x).P_x\varphi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x).\frac{\hbar}{i}\frac{d\varphi(x)}{dx}.dx$$

Donc

$$\langle P_x \rangle = N^2 \frac{\hbar}{i} \int_0^{+\infty} x.e^{-ax}(1-ax)e^{-ax}.dx$$

Donc

$$\langle P_x \rangle = N^2 \frac{\hbar}{i} \left\{ \int_0^{+\infty} x.e^{-2ax} dx - a \int_0^{+\infty} x^2.e^{-2ax} dx \right\} = 4a^3 \frac{\hbar}{i} \left\{ \frac{1!}{(2a)^2} - a \frac{2!}{(2a)^3} \right\}$$

Et

$$\boxed{\langle P_x \rangle = 0}$$

3. Valeurs moyennes $\langle X^2 \rangle$ et $\langle P_x^2 \rangle$

$$\langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x).X^2\varphi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x).x^2.\varphi(x).dx$$

D'où

$$\langle X^2 \rangle = N^2 \int_0^{+\infty} x^4.e^{-2ax} dx = 4a^3 \frac{4!}{(2a)^5}$$

Et donc

$$\boxed{\langle X^2 \rangle = 3\frac{1}{a^2}}$$

$$\langle P_x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x).P_x^2\varphi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x).\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}.dx$$

Donc

$$\langle P_x^2\rangle = -N^2\hbar^2 \int_0^{+\infty} x.e^{-ax}.\frac{d}{dx}\left((1-ax)e^{-ax}\right).dx$$

$$\langle P_x^2\rangle = -N^2\hbar^2 \int_0^{+\infty} x.e^{-ax}.(-ae^{-ax} - a(1-ax)e^{-ax}).dx$$

Donc

$$\langle P_x^2\rangle = N^2\hbar^2 a\left\{\int_0^{+\infty} 2x.e^{-2ax}dx - a\int_0^{+\infty} x^2.e^{-2ax}dx\right\} = 4a^3\hbar^2 a\left\{2\frac{1!}{(2a)^2} - a\frac{2!}{(2a)^3}\right\}$$

Et

$$\boxed{\langle P_x^2\rangle = \hbar^2 a^2}$$

4. Ecarts quadratiques moyens

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta X = \frac{1}{a}\sqrt{3 - \frac{9}{4}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\Delta X = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{a}}$$

$$\Delta P_x = \sqrt{\langle P_x^2\rangle - \langle P_x\rangle^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta P_x = \sqrt{\langle P_x^2\rangle} = \hbar a}$$

5. Le principe d'incertitude de Heisenberg est vérifié.

$$\boxed{\Delta X.\Delta P_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar > \frac{1}{2}\hbar}$$

6. Equation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E.\varphi(x)$$

Comme

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = N\frac{d}{dx}\left((1-ax)e^{-ax}\right) = -aN(2-ax)e^{-ax}$$

En remplaçant

$$\frac{\hbar^2}{2m}N.a(2-ax)e^{-ax} + \left(-\frac{C}{x}\right)N.x.e^{-ax} = E.N.x.e^{-ax}$$

En simplifiant

$$\frac{\hbar^2}{2m}a(2-ax) - C = E.x$$

Les deux polynômes du premier degré étant égaux quelque soit la valeur de x. Donc

$$\frac{\hbar^2}{m}a - C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a = \frac{m.C}{\hbar^2}}$$

7. Energie de la particule. En remplaçant la valeur de (a) dans l'équation précédente.

$$-\frac{\hbar^2 a^2}{2m} = E \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E = -\frac{m^2C^2}{2\hbar^2}}$$