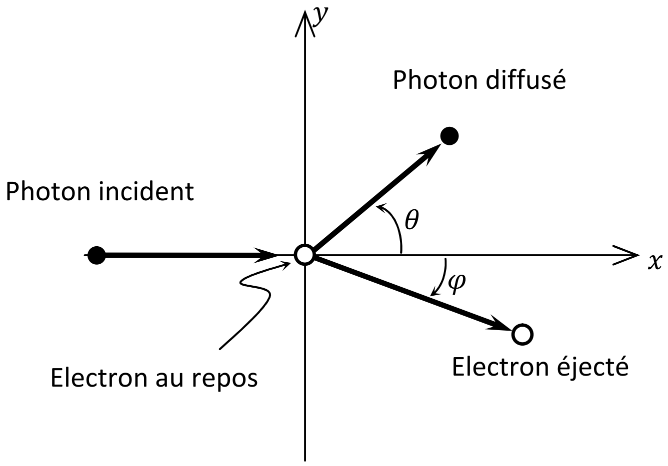
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE
DURÉE : 60 minutes.

Nom et Prénom : John Doe	Signature :	Note : /20

Exercice 01 : Effet Compton. (08 points)



Notation :
Masse de l'électron au repos : m_0
Vitesse de l'électron éjecté : v_e
Quantité de mvt de l'électron éjecté : $\vec{p}'_e$
Energie de l'électron au repos : E_{0e}
Energie de l'électron éjecté : E_e
Energie du photon incident : E_{ph}
Energie du photon diffusé : E'_{ph}
Quantité de mvt du photon incident : $\vec{p}_{ph}$
Quantité de mvt du photon diffusé : $\vec{p}'_{ph}$

1. A partir du schéma en haut écrire les relations suivantes :

- Conservation de la quantité de mouvement : $\vec{p}_{ph} = \vec{p}'_{ph} + \vec{p}'_e$

  Projection sur (Ox): $(h\nu/c) = (h\nu'/c).\cos\theta + p'_e.\cos\varphi$

  Projection sur (Oy): $0 = (h\nu'/c).\sin\theta - p'_e.\sin\varphi$

- Conservation de l'énergie : $h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2$

2. En utilisant les relations précédentes montrer que :

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

Tel que $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ est la variation de la longueur d'onde du photon diffusée, θ est l'angle de diffusion du photon et λ_c est une constante appelée « longueur d'onde Compton » qu'il faut déterminer.

L'électron éjecté étant une particule relativiste, on utilise : $p'^2_e c^2 = m^2c^4 - m_0^2c^4$

Reprenons les équations précédentes

$$p'_e c.\cos\varphi = h\nu - h\nu'.\cos\theta \quad (1)$$

$$p'_e c.\sin\varphi = h\nu'.\sin\theta \quad (2)$$

$$mc^2 = h\nu - h\nu' + m_0c^2 \quad (3)$$

En prenant la somme des carrés des équations (1) *et* (2) *on trouve*

$$p'^2_e c^2 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2\cos^2\theta - 2h\nu.h\nu'.\cos\theta + h^2\nu'^2\cos^2\theta$$

Donc

$$p'^2_e c^2 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h\nu.h\nu'.\cos\theta \quad (4)$$

D'autre part le carré de l'équation (3) *donne*

$$m^2c^4 = (h\nu - h\nu')^2 + m_0^2c^4 + 2m_0c^2(h\nu - h\nu')$$

Et donc

$$m^2c^4 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' + m_0^2c^4 + 2m_0c^2(h\nu - h\nu')$$

Que nous remplaçons dans

$$p_e'^2c^2 = m^2c^4 - m_0^2c^4$$

Ce qui donne

$$p_e'^2c^2 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' + 2m_0c^2(h\nu - h\nu') \qquad (5)$$

En comparant les équations (4) *et* (5)

$$h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu'.\cos\theta = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' + 2m_0c^2(h\nu - h\nu')$$

En élimant les termes semblables des côtés et en divisant par $2h^2\nu\nu'$

$$1 - \cos\theta = \frac{m_0c^2}{h}\frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'}$$

Ou

$$1 - \cos\theta = \frac{m_0c^2}{h}\left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu}\right)$$

Comme $c/\nu = \lambda$ *et* $c/\nu' = \lambda'$, *on trouve*

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)}$$

Avec la longueur d'onde de Compton

$$\boxed{\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2{,}426 \times 10^{-12}\ m}$$

3. Remplir le tableau suivant (valeurs numériques) pour un angle de diffusion : $\theta = 45°$.

	Photon incident	Photon diffusé	Electron de recul (éjecté)
Longueur d'onde	$\lambda =$ 0,092 (Å)	$\lambda' =$ 0,0991 (Å)	
Fréquence	$\nu = 3{,}2608 \times 10^{19}$ (Hz)	$\nu' = 3{,}027 \times 10^{19}$ (Hz)	
Energie	$E_{\mathrm{ph}} = 1{,}3504 \times 10^5$ (eV)	$E'_{\mathrm{ph}} = 1{,}2535 \times 10^5$ (eV)	$E_{\mathrm{e}} = 5{,}2069 \times 10^5$ (eV)
Quant. de mvt	$p_{\mathrm{ph}} = 7{,}2021.10^{-23}(kgms^{-1})$	$p'_{\mathrm{ph}} = 6{,}6853.10^{-23}(kgms^{-1})$	$p'_{\mathrm{e}} = 5{,}3325.10^{-23}(kgms^{-1})$

Nom et Prénom : John Doe	Signature :

Exercice 02 : Effet photoélectrique. (06 points)

1. Définir l'effet photoélectrique (décrire le phénomène).

L'effet photoélectrique est l'émission d'électrons par un métal qui est soumis à un rayonnement (Ultra Violet en Général)

2. Quelle est la définition de la fréquence seuil ν_s ?

ν_s est la fréquence au de la de la quelle le rayonnement peut produire un effet photoélectrique

$\nu < \nu_s$: Il n'y a pas d'effet photoélectrique

$\nu > \nu_s$: Il y a effet photoélectrique

Nous éclairons une plaque métallique avec un rayonnement de longueur d'onde $\lambda = 200\ nm$, les électrons sortant ont alors une énergie cinétique de $T = 2{,}112\ \ eV$.

3. Quel est la valeur du travail de sortie W_s de ce métal ?

$h\nu = W_s + \frac{1}{2}mv^2 = W_s + T$

Donc

$$\boxed{W_s = h\nu - T = \frac{hc}{\lambda} - T}$$

Application numérique : $\boxed{W_s = 4{,}0998\ eV = 6{,}5589 \times 10^{-19}\ Joules}$

4. Quelle est la fréquence seuil ν_s correspondante à ce travail de sortie ?

$h\nu_s = W_s$ donc $\boxed{\nu_s = W_s/h}$

Application numérique : $\boxed{\nu_s = 9{,}9 \times 10^{14}\ Hz}$

5. Nous éclairons ce métal successivement avec deux rayonnements de longueurs d'onde $\lambda = 250\ nm$ et $\lambda = 350\ nm$. Calculer dans chaque cas l'énergie cinétique des électrons sortants.

$h\nu = W_s + T$ donc $\boxed{T = h\nu - W_s}$

Application numérique :

$\lambda = 250\ nm \Rightarrow \nu = 12 \times 10^{14}\ Hz$ et $\boxed{T = 0{,}8697\ eV}$

$\lambda = 350\ nm \Rightarrow \nu = 8{,}5714 \times 10^{14}\ Hz$: $\nu < \nu_s$: Il n'y a pas d'effet photoélectrique

Exercice 03 : Paquet d'ondes libres. (06 points)

On donne l'expression d'un paquet d'onde libre à une dimension par :

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(k).e^{i(kx-\omega t)}dk$$

1. Calculer l'expression donnant la forme d'un paquet d'ondes libres à une dimension $\psi(x,0)$ à $t=0$ pour :

$$\begin{cases} g(k)=A \quad \text{pour} \quad k\in\left[k_0-\frac{\Delta k}{2},k_0+\frac{\Delta k}{2}\right] \\ g(k)=0 \quad \text{ailleur} \end{cases}$$

Tel que $A,\Delta k$ et k_0 sont des constantes positives.

En remplaçant $g(k)$

$$\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{k_0-\Delta k/2}0.e^{ikx}dk+\int_{k_0-\Delta k/2}^{k_0+\Delta k/2}A.e^{ikx}dk+\int_{k_0+\Delta k/2}^{+\infty}0.e^{ikx}dk\right\}$$

Donc

$$\psi(x,0)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{k_0-\Delta k/2}^{k_0+\Delta k/2}e^{ikx}dk=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{ikx}}{ix}\right]_{k_0-\Delta k/2}^{k_0+\Delta k/2}$$

Et

$$\psi(x,0)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ik_0x}}{ix}\left(e^{i(\Delta k/2)x}-e^{-i(\Delta k/2)x}\right)$$

Ou

$$\boxed{\psi(x,0)=\frac{2A}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\Delta k.x/2)}{x}e^{ik_0x}}$$

Et le carré du module

$$\boxed{|\psi(x,0)|^2=\psi^*.\psi=\frac{2|A|^2}{\pi}\frac{\sin^2(\Delta k.x/2)}{x^2}}$$

2. Représenter la densité de probabilité de présence $|\psi(x,0)|^2$ en fonction de x.