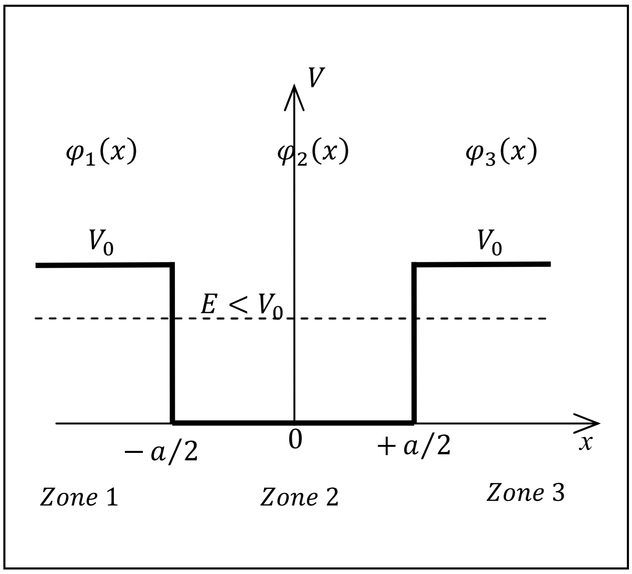
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE.

EXERCICE 01: (10 points)

$$\begin{cases} V(x) = V_0 & \text{pour} \quad x \in]-\infty, -a/2] \\ V(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in [-a/2, +a/2] \\ V(x) = V_0 & \text{pour} \quad x \in [+a/2, +\infty[\end{cases}$$



1. Equation de Schrödinger indépendante du temps.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x) + V(x).\varphi(x) = E.\varphi(x)$$

En remplaçant

$$\begin{cases} Zone\ 1: & -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} + V_0.\varphi_1(x) = E.\varphi_1(x) \\ Zone\ 2: & -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2} = E.\varphi_2(x) \\ Zone\ 3: & -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_3(x)}{dx^2} + V_0.\varphi_3(x) = E.\varphi_3(x) \end{cases}$$

Dont les solutions sont $(E < V_0)$

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1.e^{\rho x} + B_1.e^{-\rho x} \\ \varphi_2(x) = A_2.e^{ikx} + B_2.e^{-ikx} \\ \varphi_3(x) = A_3.e^{\rho x} + B_3.e^{-\rho x} \end{cases}$$

Les ondes amplifiées $\begin{cases} B_1.e^{-\rho x} \to +\infty & \text{pour} \quad x \to -\infty \\ A_3.e^{\rho x} \to +\infty & \text{pour} \quad x \to +\infty \end{cases}$ donc $B_1 = 0$ et $A_3 = 0$

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1.e^{\rho x} \\ \varphi_2(x) = A_2.e^{ikx} + B_2.e^{-ikx} \\ \varphi_3(x) = B_3.e^{-\rho x} \end{cases}} \quad \text{avec} \quad \boxed{k = \sqrt{2m.E/\hbar^2}} \quad ; \quad \boxed{\rho = \sqrt{2m.(V_0 - E)/\hbar^2}}$$

2. Détermination des constantes

Continuité de la fonction d'onde en $x = -a/2.$

$$\varphi_1(x = -a/2) = \varphi_2(x = -a/2) \quad \Rightarrow \quad A_1.e^{-\frac{\rho a}{2}} = A_2.e^{-i\frac{ka}{2}} + B_2.e^{+i\frac{ka}{2}} \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

Continuité de la dérivée première de la fonction d'onde en $x = -a/2$

$$\varphi_1'(x = -a/2) = \varphi_2'(x = -a/2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varphi_1'(x) = \rho A_1.e^{\rho x} \\ \varphi_2'(x) = ik\left(A_2.e^{ikx} - B_2.e^{-ikx}\right) \end{cases}$$

Donc

$$\frac{\rho}{ik}A_1.e^{-\frac{\rho a}{2}} = A_2.e^{-i\frac{ka}{2}} - B_2.e^{+i\frac{ka}{2}} \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

Continuité de la fonction d'onde en $x = +a/2$

$$\varphi_2(x = +a/2) = \varphi_3(x = +a/2) \quad \Rightarrow \quad A_2.e^{+i\frac{ka}{2}} + B_2.e^{-i\frac{ka}{2}} = B_3.e^{-\frac{\rho a}{2}} \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

En faisant la somme $(1)+(2)$

$$2A_2.e^{-i\frac{ka}{2}} = A_1.e^{-\frac{\rho a}{2}}.\left(1+\frac{\rho}{ik}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_2 = \left(\frac{\rho+ik}{2ik}\right).A_1 e^{-(\rho-ik)\frac{a}{2}}}$$

En faisant la différence $(1)-(2)$

$$2B_2.e^{+i\frac{ka}{2}} = A_1.e^{-\frac{\rho a}{2}}.\left(1-\frac{\rho}{ik}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_2 = -\left(\frac{\rho-ik}{2ik}\right).A_1 e^{-(\rho+ik)\frac{a}{2}}}$$

En remplaçant dans (3)

$$\left(\frac{\rho+ik}{2ik}\right).A_1 e^{-(\rho-ik)\frac{a}{2}}.e^{+i\frac{ka}{2}} - \left(\frac{\rho-ik}{2ik}\right).A_1 e^{-(\rho+ik)\frac{a}{2}}.e^{-i\frac{ka}{2}} = B_3.e^{-\frac{\rho a}{2}}$$

Donc

$$\left(\frac{\rho+ik}{2ik}\right).A_1 e^{ika} - \left(\frac{\rho-ik}{2ik}\right).A_1 e^{-ika} = \frac{1}{2ik}A_1\left\{(\rho+ik)e^{ika} - (\rho-ik)e^{-ika}\right\} = B_3$$

Et finalement

$$\boxed{B_3 = A_1.\left(\frac{\rho}{k}\sin(ka) + \cos(ka)\right)}$$

3. Condition de normalisation. (permet de calculer A_1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{-a/2} \varphi_1^*(x).\varphi_1(x).dx + \int_{-a/2}^{+a/2} \varphi_2^*(x).\varphi_2(x).dx + \int_{+a/2}^{+\infty} \varphi_3^*(x).\varphi_3(x).dx = 1$$

4. Condition de quantification.

Continuité de la dérivée première de la fonction d'onde en $x = +a/2$

$$\varphi_2'(x=+a/2) = \varphi_3'(x=+a/2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varphi_2'(x) = ik\left(A_2.e^{ikx} - B_2.e^{-ikx}\right) \\ \varphi_3'(x) = -\rho B_3.e^{-\rho x} \end{cases}$$

Donc

$$-\frac{\rho}{ik}B_3.e^{-\frac{\rho a}{2}} = A_2.e^{+i\frac{ka}{2}} - B_2.e^{-i\frac{ka}{2}}$$

En remplaçant A_2, B_2 et B_3 dans cette équation, nous avons

$$-\frac{\rho}{ik}A_1.\left(\frac{\rho}{k}\sin(ka)+\cos(ka)\right).e^{-\frac{\rho a}{2}} = \left(\frac{\rho+ik}{2ik}\right).A_1 e^{-(\rho-ik)\frac{a}{2}}.e^{+i\frac{ka}{2}} + \left(\frac{\rho-ik}{2ik}\right).A_1 e^{-(\rho+ik)\frac{a}{2}}.e^{-i\frac{ka}{2}}$$

Donc

$$-\rho.\left(\frac{\rho}{k}\sin(ka)+\cos(ka)\right) = \left(\frac{\rho+ik}{2}\right).e^{ika} + \left(\frac{\rho-ik}{2}\right).e^{-ika}$$

Et

$$\frac{\rho}{k}\sin(ka)+\cos(ka) = \frac{k}{\rho}\sin(ka) - \cos(ka)$$

Finalement

$$\boxed{\tan(ka) = \frac{2k\rho}{k^2-\rho^2}}$$

Avec $\quad k = \sqrt{2m.E/\hbar^2} \quad$ et $\quad \rho = \sqrt{2m.(V_0-E)/\hbar^2}$

EXERCICE 02 : (10 points)

$$\psi(x) = \frac{N}{x^2 + a^2}$$

Normalisation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).\psi(x).dx = 1 \quad \Rightarrow \quad N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx = 1$$

En utilisant le changement de variable

$x = a.\tan(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = a.d\theta/\cos^2\theta$ avec $-\infty < x < +\infty \quad \Rightarrow \quad -\pi/2 < \theta < +\pi/2$

Nous obtenons

$$N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx = N^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{a}{(a^2.\tan^2\theta + a^2)^2} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = 1$$

D'où

$$\frac{N^2}{a^3} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{(\tan^2\theta + 1)^2} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{N^2}{a^3} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2\theta \,.d\theta = 1$$

En utilise

$$\tan^2\theta + 1 = 1/\cos^2\theta \quad \text{et} \quad \cos^2\theta = (1+\cos 2\theta)/2$$

$$\frac{N^2}{2a^3} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (1+\cos 2\theta).d\theta = \frac{N^2}{2a^3} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 1$$

Finalement

$$\frac{N^2\pi}{2a^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\psi(x) = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}} \frac{1}{x^2+a^2}}$$

2. Probabilité de présence :

$$P(-a \le x \le +a) = \int_{-a}^{+a} \psi^*(x).\psi(x).dx = \frac{2a^3}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx$$

En utilisant le même changement de variable

$x = a.\tan(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = a.d\theta/\cos^2\theta$ avec $-a < x < +a \quad \Rightarrow \quad -\pi/4 < \theta < +\pi/4$

Nous obtenons

$$\frac{2a^3}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{2a^3}{\pi} \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \frac{a}{(a^2.\tan^2\theta + a^2)^2} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

D'où

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \frac{1}{(\tan^2\theta + 1)^2} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \cos^2\theta \,.d\theta$$

En utilise

$$\tan^2\theta + 1 = 1/\cos^2\theta \quad \text{et} \quad \cos^2\theta = (1+\cos 2\theta)/2$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} (1+\cos 2\theta).d\theta = \frac{1}{\pi} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\pi/4}^{+\pi/4} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$$

Finalement

$$\boxed{P(-a \le x \le +a) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) = 0{,}818}$$

3. Valeurs moyennes $\langle X\rangle$ et $\langle P\rangle$

$$\langle X\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).X\psi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).x\psi(x).dx$$

Donc

$$\langle X\rangle = \frac{2a^3}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{a^3}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2x.(x^2+a^2)^{-2}.dx$$

$$\langle X\rangle = \frac{a^3}{\pi}[-(x^2+a^2)^{-1}]_{-\infty}^{+\infty} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\langle X\rangle = 0}$$

$$\langle P\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).P\psi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi(x)}{dx}.dx$$

Comme

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}}\frac{-2x}{(x^2+a^2)^2}$$

Donc

$$\langle P\rangle = \frac{2a^3}{\pi}\frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2x}{(x^2+a^2)^3}dx = \frac{a^3}{\pi}\frac{\hbar}{i}[(x^2+a^2)^{-2}]_{-\infty}^{+\infty} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\langle P\rangle = 0}$$

4. Valeur moyenne $\langle X^2\rangle$

$$\langle X^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).X^2\psi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).x^2\psi(x).dx$$

Donc

$$\langle X^2\rangle = \frac{2a^3}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$$

En utilisant le changement de variable

$$x = a.\tan(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = a.d\theta/\cos^2\theta \quad \text{avec} \quad -\infty < x < +\infty \quad \Rightarrow \quad -\pi/2 < \theta < +\pi/2$$

Nous obtenons

$$\langle X^2\rangle = \frac{2a^3}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{2a^3}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{a^2.\tan^2\theta\,.a}{(a^2.\tan^2\theta + a^2)^2}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

D'où

$$\frac{2a^2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\tan^2\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2a^2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \tan^2\theta\,.\cos^2\theta\,.d\theta = \frac{2a^2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin^2\theta\,.d\theta$$

En utilise

$$\tan^2\theta + 1 = 1/\cos^2\theta \qquad \text{et} \qquad \sin^2\theta = (1-\cos 2\theta)/2$$

$$\langle X^2\rangle = \frac{a^2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (1-\cos 2\theta).d\theta = \frac{a^2}{\pi}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

Finalement

$$\boxed{\langle X^2\rangle = a^2}$$

5. Ecart quadratique moyen

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta X = \sqrt{\langle X^2\rangle} = a}$$