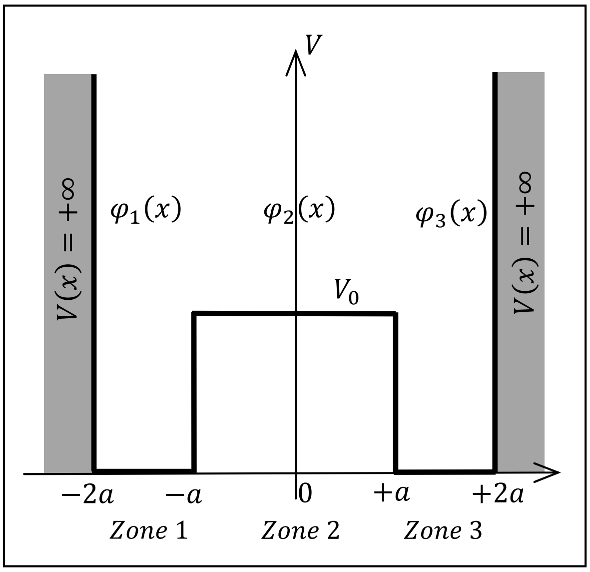
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE.

EXERCICE 01: (10 points)

$$\begin{cases} V(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in [-2a, -a] \cup [+a, +2a] \\ V(x) = V_0 \quad \text{pour} \quad x \in [-a, +a] \\ V(x) = +\infty \quad \text{ailleur} \end{cases}$$



1. Equation de Schrödinger indépendante du temps.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x) + V(x).\varphi(x) = E.\varphi(x)$$

En remplaçant

$$\begin{cases} Zone\ 1: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} = E.\varphi_1(x) \\ Zone\ 2: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2} + V_0.\varphi_2(x) = E.\varphi_2(x) \\ Zone\ 3: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_3(x)}{dx^2} = E.\varphi_3(x) \end{cases}$$

Et

$$\boxed{\varphi(x) = 0 \qquad \text{ailleur}}$$

Dont les solutions sont pour $E < V_0$:

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1.e^{+ikx} + B_1.e^{-ikx} \\ \varphi_2(x) = A_2.e^{+\rho x} + B_2.e^{-\rho x} \\ \varphi_3(x) = A_3.e^{+ikx} + B_3.e^{-ikx} \end{cases}} \quad \text{avec} \quad \boxed{k = \sqrt{2m.E/\hbar^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\rho = \sqrt{2m.(V_0 - E)/\hbar^2}}$$

2. Détermination des constantes

Continuité de la fonction d'onde en $x = -2a$.

$$\varphi_1(x = -a) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1.e^{-2ika} + B_1.e^{2ika} = 0$$

Donc

$$\boxed{B_1 = -A_1.e^{-4ika}} \qquad (1)$$

Continuité de la fonction d'onde en $x = -a$.

$$\varphi_1(x = -a) = \varphi_2(x = -a) \quad \Rightarrow \quad A_1.e^{-ika} + B_1.e^{+ika} = A_2.e^{-\rho a} + B_2\,.e^{+\rho a}$$

En remplaçant par l'équation (1)

$$A_1.e^{-ika}\left(1 - e^{-2ika}\right) = A_2.e^{-\rho a} + B_2\,.e^{+\rho a}$$

Ou

$$A_2.e^{-\rho a} + B_2\,.e^{+\rho a} = 2iA_1.e^{-2ika}.\sin(ka) \qquad (2)$$

Continuité de la dérivée première de la fonction d'onde en $x = -a$.

$$\left.\frac{d\varphi_1(x)}{dx}\right|_{x=-a} = \left.\frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right|_{x=-a}$$

Donc

$$ik\left(A_1.e^{-ika} - B_1.e^{+ika}\right) = \rho(A_2.e^{-\rho a} - B_2\,.e^{+\rho a})$$

En remplaçant par l'équation (1)

$$A_2.e^{-\rho a} - B_2\,.e^{+\rho a} = \frac{ik}{\rho}A_1.e^{-ika}\left(1 + e^{-2ika}\right)$$

Et

$$A_2.e^{-\rho a} - B_2\,.e^{+\rho a} = 2\frac{ik}{\rho}A_1.e^{-2ika}\cos(ka) \qquad (3)$$

En faisant la somme $(2) + (3)$

$$\boxed{A_2 = iA_1.e^{-2ika}.e^{+\rho a}\left(\sin(ka) + \frac{k}{\rho}\cos(ka)\right)}$$

En faisant la différence $(2) - (3)$

$$\boxed{B_2 = iA_1.e^{-2ika}.e^{-\rho a}\left(\sin(ka) - \frac{k}{\rho}\cos(ka)\right)}$$

Continuité de la fonction d'onde en $x = +a$.

$$\varphi_2(x = +a) = \varphi_3(x = +a) \quad \Rightarrow \quad A_2.e^{+\rho a} + B_2\,.e^{-\rho a} = A_3.e^{+ika} + B_3.e^{-ika}$$

Donc

$$A_3.e^{+ika} + B_3.e^{-ika} = iA_1.e^{-2ika}\left\{e^{+2\rho a}\left(\sin(ka) + \frac{k}{\rho}\cos(ka)\right) + e^{-2\rho a}\left(\sin(ka) - \frac{k}{\rho}\cos(ka)\right)\right\}$$

Et

$$A_3.e^{+ika} + B_3.e^{-ika} = 2iA_1.e^{-2ika}\left(\sin(ka)\cosh(2\rho a) + \frac{k}{\rho}\cos(ka)\sinh(2\rho a)\right) \qquad (4)$$

Continuité de la dérivée première de la fonction d'onde en $x = +a$.

$$\left.\frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right|_{x=+a} = \left.\frac{d\varphi_3(x)}{dx}\right|_{x=+a}$$

Donc

$$\rho(A_2.e^{+\rho a} - B_2\,.e^{-\rho a}) = ik\left(A_3.e^{+ika} - B_3.e^{-ika}\right)$$

En remplaçant

$$A_3.e^{+ika} - B_3.e^{-ika} = \frac{\rho}{k}A_1.e^{-2ika}\left\{e^{+2\rho a}\left(\sin(ka) + \frac{k}{\rho}\cos(ka)\right) - e^{-2\rho a}\left(\sin(ka) - \frac{k}{\rho}\cos(ka)\right)\right\}$$

Et

$$A_3.e^{+ika} - B_3.e^{-ika} = 2A_1.e^{-2ika}\left(\frac{\rho}{k}\sin(ka)\sinh(2\rho a) + \cos(ka)\cosh(2\rho a)\right) \qquad (5)$$

En faisant la somme $(4) + (5)$

$$\boxed{A_3 = A_1.e^{-2ika}\left(\cosh(2\rho a) + \sinh(2\rho a)\left(\frac{ik}{\rho}\cos(ka) + \frac{\rho}{k}\sin(ka)\right)e^{-ika}\right)}$$

En faisant la différence $(4) - (5)$

$$\boxed{B_3 = A_1.e^{-2ika}\left(\cosh(2\rho a) + \sinh(2\rho a)\left(\frac{ik}{\rho}\cos(ka) - \frac{\rho}{k}\sin(ka)\right)e^{+ika}\right)}$$

3. Condition de quantification.

Continuité de la fonction d'onde en $x = +2a$.

$$\varphi_3(x = +2a) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_3.e^{+2ika} + B_3.e^{-2ika} = 0$$

En remplaçant par les valeurs trouvées de A_3 et B_3.

$$\left(\cosh(2\rho a) + \sinh(2\rho a)\left(\frac{ik}{\rho}\cos(ka) + \frac{\rho}{k}\sin(ka)\right)e^{-ika}\right).e^{+2ika}$$
$$+\left(\cosh(2\rho a) + \sinh(2\rho a)\left(\frac{ik}{\rho}\cos(ka) - \frac{\rho}{k}\sin(ka)\right)e^{-ika}\right).e^{-2ika} = 0$$

Ce qui donne

$$\boxed{\cosh(2\rho a).\cos(2ka) + i\sinh(2\rho a)\left(\frac{k}{\rho}\cos^2(ka) + \frac{\rho}{k}\sin^2(ka)\right) = 0}$$

4. Dans le cas où $(V_0 = 0)$.

La particule est alors dans une boite de potentiel à une dimension de largeur $L = 4a$.

D'où les états stationnaires à l'intérieur de la boite sont

$$\boxed{\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\sin\left(n\frac{\pi}{4a}x\right)}$$

Les énergies de la particule sont

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{32ma^2}n^2}$$

Et la condition de quantification

$$\boxed{k = n\frac{\pi}{4a}}$$

n étant le nombre quantique (un entier naturel non nul).

EXERCICE 02 : (10 points)

1. **Opérateur adjoint dans l'espace des fonctions d'ondes.**

$$\int_{\text{espace}} \varphi^*(\vec{r}).A\psi(\vec{r}).d^3r = \left(\int_{\text{espace}} \psi^*(\vec{r}).A^+\varphi(\vec{r}).d^3r\right)^*$$

Ou

$$\boxed{\int_{\text{espace}} \varphi^*(\vec{r}).A\psi(\vec{r}).d^3r = \int_{\text{espace}} \left(A^+\varphi(\vec{r})\right)^*.\psi(\vec{r}).d^3r}$$

2. **Opérateur hermétique.**

Un opérateur est dit hermétique s'il est égal à son adjoint : $A = A^+$. Ou bien :

$$\int_{\text{espace}} \varphi^*(\vec{r}).A\psi(\vec{r}).d^3r = \int_{\text{espace}} \left(A\varphi(\vec{r})\right)^*.\psi(\vec{r}).d^3r$$

3. **En utilisant les propriétés suivantes de l'adjoint d'un opérateur.**

- $A = (A^+)^+$
- $(\lambda.A)^+ = \lambda^*.A^+$
- $(A+B)^+ = A^+ + B^+$
- $(AB)^+ = B^+A^+$

Donc

$$(A + A^+)^+ = A^+ + (A^+)^+ = A^+ + A = A + A^+ \qquad \text{hermétique}$$
$$\left(i(A - A^+)\right)^+ = -i(A^+ - (A^+)^+) = -i(A^+ - A) = i(A - A^+) \qquad \text{hermétique}$$
$$(AA^+)^+ = (A^+)^+A^+ = AA^+ \qquad \text{hermétique}$$

$$\begin{cases} \psi(x) = A.(x/a) & \text{pour} \quad x \in [0, +a] \\ \psi(x) = A.(2a - x)/a & \text{pour} \quad x \in [+a, +2a] \\ \psi(x) = 0 & \text{ailleur} \end{cases}$$

4. **Normalisation.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).\psi(x).dx = 1$$

Donc

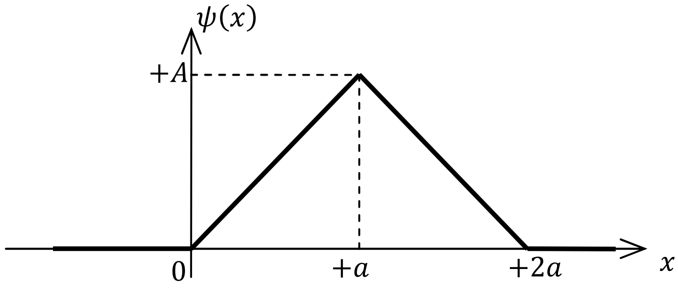
$$A^2 \int_0^{+a} \left(\frac{x}{a}\right)^2.dx + A^2 \int_{+a}^{+2a} \left(\frac{2a - x}{a}\right)^2.dx = 1$$

$$A^2 \frac{1}{a^2}\left\{\int_0^{+a} x^2.dx + \int_{+a}^{+2a} (4a^2 + x^2 - 4ax).dx\right\} = A^2 \frac{1}{a^2}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{+a} + \left[4a^2x + \frac{x^3}{3} - 2ax^2\right]_{+a}^{+2a}\right\} = 1$$

$$A^2 \frac{1}{a^2}\left\{\frac{a^3}{3} + \left(4a^3 + \frac{7}{3}a^3 - 6a^3\right)\right\} = \frac{2}{3}A^2 a = 1$$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{3}{2a}}}$$

5. Représentation.



6. Probabilité.

$$P(0 \leq x \leq a) = \int_0^{+a} |\psi(x)|^2 dx = A^2 \int_0^{+a} \left(\frac{x}{a}\right)^2 . dx$$

$$P(0 \leq x \leq a) = A^2 \frac{1}{a^2} \int_0^{+a} x^2 . dx = A^2 \frac{1}{a^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{+a}$$

Et donc

$$\boxed{P(0 \leq x \leq a) = \frac{3}{2a} \frac{a}{3} = \frac{1}{2}}$$

Ce qui parait évident puisque les surfaces sous les coubes de $|\psi(x)|^2$ entre $[0, +a]$ et $[+a, +2a]$ étant les mêmes et leur somme étant égale à 1.

7. Valeurs moyennes $\langle X \rangle$ et $\langle P_x \rangle$.

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x). X\psi(x). dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x). x. \psi(x). dx$$

Donc

$$\langle X \rangle = A^2 \int_0^{+a} x \left(\frac{x}{a}\right)^2 . dx + A^2 \int_{+a}^{+2a} x \left(\frac{2a - x}{a}\right)^2 . dx$$

$$\langle X \rangle = A^2 \frac{1}{a^2} \left\{ \int_0^{+a} x^3 . dx + \int_{+a}^{+2a} (4a^2 x + x^3 - 4ax^2). dx \right\}$$

$$\langle X \rangle = \frac{3}{2a} \frac{1}{a^2} \left\{ \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{+a} + \left[2a^2x^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}ax^3\right]_{+a}^{+2a} \right\} = \frac{3}{2} a \left\{ \frac{1}{4} + \left(6 + \frac{15}{4} - \frac{28}{3}\right) \right\}$$

Et

$$\boxed{\langle X \rangle = a}$$

$$\langle P_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x). P_x \psi(x). dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x). \frac{\hbar}{i} \frac{d\psi(x)}{dx} dx$$

Donc

$$\langle P_x \rangle = \frac{\hbar}{i} A^2 \int_0^{+a} \frac{x}{a^2} dx - \frac{\hbar}{i} A^2 \int_{+a}^{+2a} \frac{2a - x}{a^2} dx = \frac{\hbar}{i} A^2 \frac{1}{a^2} \left\{ \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{+a} - \left[2ax - \frac{x^2}{2}\right]_{+a}^{+2a} \right\}$$

$$\langle P_x \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{3}{2a} \left\{ \frac{1}{2} - \left(2 - \frac{3}{2}\right) \right\} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\langle P_x \rangle = 0}$$