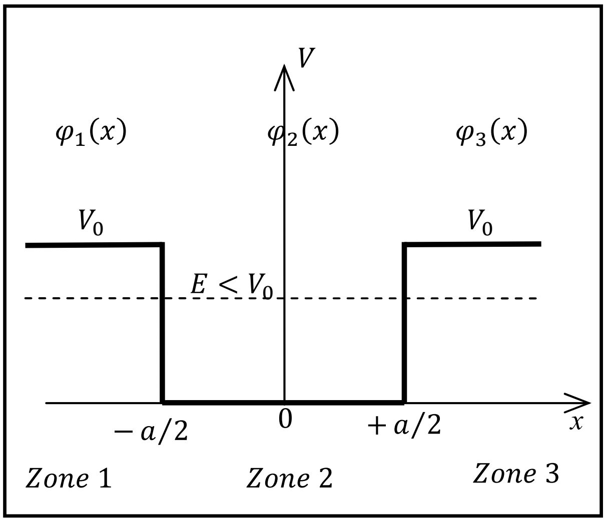
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : MÉCANIQUE QUANTIQUE.

EXERCICE 01: (08 points)

$$\begin{cases} V(x) = V_0 & \text{pour} \quad x \in]-\infty, -a/2] \\ V(x) = 0 & \text{pour} \quad x \in [-a/2, +a/2] \\ V(x) = V_0 & \text{pour} \quad x \in [+a/2, +\infty[\end{cases}$$



1. Equation de Schrödinger indépendante du temps.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x) + V(x).\varphi(x) = E.\varphi(x)$$

En remplaçant

$$\begin{cases} Zone\ 1: & -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} + V_0.\varphi_1(x) = E.\varphi_1(x) \\ Zone\ 2: & -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2} = E.\varphi_2(x) \\ Zone\ 3: & -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\varphi_3(x)}{dx^2} + V_0.\varphi_3(x) = E.\varphi_3(x) \end{cases}$$

Dont les solutions sont $(E < V_0)$

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1.e^{\rho x} + B_1.e^{-\rho x} \\ \varphi_2(x) = A_2.e^{ikx} + B_2.e^{-ikx} \\ \varphi_3(x) = A_3.e^{\rho x} + B_3.e^{-\rho x} \end{cases}$$

Les ondes amplifiées $\begin{cases} B_1.e^{-\rho x} \to +\infty & \text{pour} \quad x \to -\infty \\ A_3.e^{\rho x} \to +\infty & \text{pour} \quad x \to +\infty \end{cases}$ donc $B_1 = 0$ et $A_3 = 0$

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_1(x) = A_1.e^{\rho x} \\ \varphi_2(x) = A_2.e^{ikx} + B_2.e^{-ikx} \\ \varphi_3(x) = B_3.e^{-\rho x} \end{cases}} \quad \text{avec} \quad \boxed{k = \sqrt{2m.E/\hbar^2}} \quad ; \quad \boxed{\rho = \sqrt{2m.(V_0 - E)/\hbar^2}}$$

2. Détermination des constantes

<u>Continuité de la fonction d'onde en $x = -a/2$.</u>

$$\varphi_1(x = -a/2) = \varphi_2(x = -a/2) \quad \Rightarrow \quad A_1.e^{-\frac{\rho a}{2}} = A_2.e^{-i\frac{ka}{2}} + B_2.e^{+i\frac{ka}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

<u>Continuité de la dérivée première de la fonction d'onde en $x = -a/2$</u>

$$\varphi_1'(x = -a/2) = \varphi_2'(x = -a/2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varphi_1'(x) = \rho A_1.e^{\rho x} \\ \varphi_2'(x) = ik\left(A_2.e^{ikx} - B_2.e^{-ikx}\right) \end{cases}$$

Donc

$$\frac{\rho}{ik}A_1.e^{-\frac{\rho a}{2}} = A_2.e^{-i\frac{ka}{2}} - B_2.e^{+i\frac{ka}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

<u>Continuité de la fonction d'onde en $x = +a/2$</u>

$$\varphi_2(x = +a/2) = \varphi_3(x = +a/2) \quad \Rightarrow \quad A_2.e^{+i\frac{ka}{2}} + B_2.e^{-i\frac{ka}{2}} = B_3.e^{-\frac{\rho a}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

En faisant la somme $(1) + (2)$

$$2A_2.e^{-i\frac{ka}{2}} = A_1.e^{-\frac{\rho a}{2}}.\left(1+\frac{\rho}{ik}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_2 = \left(\frac{\rho+ik}{2ik}\right).A_1 e^{-(\rho-ik)\frac{a}{2}}}$$

En faisant la différence $(1) - (2)$

$$2B_2.e^{+i\frac{ka}{2}} = A_1.e^{-\frac{\rho a}{2}}.\left(1-\frac{\rho}{ik}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_2 = -\left(\frac{\rho-ik}{2ik}\right).A_1 e^{-(\rho+ik)\frac{a}{2}}}$$

En remplaçant dans (3)

$$\left(\frac{\rho+ik}{2ik}\right).A_1 e^{-(\rho-ik)\frac{a}{2}}.e^{+i\frac{ka}{2}} - \left(\frac{\rho-ik}{2ik}\right).A_1 e^{-(\rho+ik)\frac{a}{2}}.e^{-i\frac{ka}{2}} = B_3.e^{-\frac{\rho a}{2}}$$

Donc

$$\left(\frac{\rho+ik}{2ik}\right).A_1 e^{ika} - \left(\frac{\rho-ik}{2ik}\right).A_1 e^{-ika} = \frac{1}{2ik}A_1\{(\rho+ik)e^{ika} - (\rho-ik)e^{-ika}\} = B_3$$

Et finalement

$$\boxed{B_3 = A_1.\left(\frac{\rho}{k}\sin(ka) + \cos(ka)\right)}$$

Condition de normalisation. (permet de calculer A_1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{-a/2} \varphi_1^*(x).\varphi_1(x).dx + \int_{-a/2}^{+a/2} \varphi_2^*(x).\varphi_2(x).dx + \int_{+a/2}^{+\infty} \varphi_3^*(x).\varphi_3(x).dx = 1$$

3. Condition de quantification.

Continuité de la dérivée première de la fonction d'onde en $x = +a/2$

$$\varphi_2'(x = +a/2) = \varphi_3'(x = +a/2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varphi_2'(x) = ik\left(A_2.e^{ikx} - B_2.e^{-ikx}\right) \\ \varphi_3'(x) = -\rho B_3.e^{-\rho x} \end{cases}$$

Donc

$$-\frac{\rho}{ik}B_3.e^{-\frac{\rho a}{2}} = A_2.e^{+i\frac{ka}{2}} - B_2.e^{-i\frac{ka}{2}}$$

En remplaçant A_2, B_2 et B_3 dans cette équation, nous avons

$$-\frac{\rho}{ik}A_1.\left(\frac{\rho}{k}\sin(ka) + \cos(ka)\right).e^{-\frac{\rho a}{2}} = \left(\frac{\rho+ik}{2ik}\right).A_1 e^{-(\rho-ik)\frac{a}{2}}.e^{+i\frac{ka}{2}} + \left(\frac{\rho-ik}{2ik}\right).A_1 e^{-(\rho+ik)\frac{a}{2}}.e^{-i\frac{ka}{2}}$$

Donc

$$-\rho.\left(\frac{\rho}{k}\sin(ka) + \cos(ka)\right) = \left(\frac{\rho+ik}{2}\right).e^{ika} + \left(\frac{\rho-ik}{2}\right).e^{-ika}$$

Et

$$\frac{\rho}{k}\sin(ka) + \cos(ka) = \frac{k}{\rho}\sin(ka) - \cos(ka)$$

Finalement

$$\boxed{\tan(ka) = \frac{2k\rho}{k^2 - \rho^2}}$$

Avec $\quad k = \sqrt{2m.E/\hbar^2} \quad$ et $\quad \rho = \sqrt{2m.(V_0 - E)/\hbar^2}$

EXERCICE 02 : (08 points)

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad ; \quad \psi(x) = A.e^{-ax^2}$$

1. **Normalisation :**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).\psi(x).dx = 1 \quad \Rightarrow \quad |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ax^2} dx = 1$$

En utilisant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\pi/\beta} \quad \text{avec} \quad \beta = 2a \quad \text{on a} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ax^2} dx = \sqrt{\pi/2a}$$

D'où

$$\boxed{|A| = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\psi(x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ax^2}}$$

2. **Valeurs moyennes $\langle X \rangle$ et $\langle P_x \rangle$.**

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).X\psi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).x.\psi(x).dx$$

Donc

$$\langle X \rangle = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-2ax^2} dx \quad \text{d'où} \quad \boxed{\langle X \rangle = 0}$$

$$\langle P_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).P_x\psi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}.dx$$

Donc

$$\langle P_x \rangle = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}.(-2ax)e^{-ax^2}.dx = -2a.|A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-2ax^2}.dx$$

Et

$$\boxed{\langle P_x \rangle = 0}$$

3. **Valeurs de moyennes $\langle X^2 \rangle$ et $\langle P_x^2 \rangle$.**

$$\langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).X^2\psi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).x^2.\psi(x).dx$$

Donc

$$\langle X^2 \rangle = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.e^{-2ax^2} dx$$

En utilisant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta.x^2} dx = \sqrt{\pi/4\beta^3} \quad \text{avec} \quad \beta = 2a \quad \text{on a} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.e^{-2ax^2} dx = \sqrt{\pi/16a^3}$$

Et

$$\langle X^2 \rangle = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{16a^3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle X^2 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{a}}$$

$$\langle P_x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).P_x^2\psi(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x).(-\hbar^2)\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}.dx$$

En calculant la dérivée

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A.e^{-ax^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A.(-2ax)e^{-ax^2}\right) = -2a.A.(1-2ax^2)e^{-ax^2}$$

Donc

$$\langle P_x^2\rangle = 2a\hbar^2.|A|^2\int_{-\infty}^{+\infty}(1-2ax^2).e^{-2ax^2}.dx = 2a\hbar^2.|A|^2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2ax^2}.dx - 2a\int_{-\infty}^{+\infty}x^2.e^{-2ax^2}.dx\right)$$

En remplaçant

$$\langle P_x^2\rangle = 2a\hbar^2.\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2a}} - 2a\sqrt{\frac{\pi}{16a^3}}\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\langle P_x^2\rangle = \left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)a\hbar^2}$$

4. Ecarts quadratiques moyens.

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\Delta X = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{a}}}$$

$$\Delta P_x = \sqrt{\langle P_x^2\rangle - \langle P_x\rangle^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\Delta P_x = \sqrt{\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)a\hbar^2} = \left(\sqrt{\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)a}\right)\hbar}$$

$$\boxed{\Delta X\Delta P_x = \left(\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}}\right)\hbar = 0{,}676.\hbar > \frac{\hbar}{2}}$$

Le principe d'incertitude est vérifié

5. Equation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E.\psi(x)$$

En remplaçant

$$\frac{\hbar^2}{2m}2a.A.(1-2ax^2)e^{-ax^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2A.e^{-ax^2} = E.A.e^{-ax^2}$$

Donc

$$\frac{\hbar^2}{m}a.(1-2ax^2) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = E$$

Ou

$$\left(\frac{1}{2}m\omega^2 - 2\frac{a^2\hbar^2}{m}\right)x^2 + \left(\frac{a\hbar^2}{m} - E\right) = 0$$

Comme ce polynome doit être nul quelque soit la valeur de x. Nous avons donc :

$$\frac{1}{2}m\omega^2 - 2\frac{a^2\hbar^2}{m} = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a = \frac{m\omega}{2\hbar}}$$

6. Énergie de la particule dans cet état.

$$\frac{a\hbar^2}{m} - E = 0 \quad\Rightarrow\quad E = \frac{a\hbar^2}{m} \quad \text{donc} \quad \boxed{E = \frac{1}{2}\hbar\omega}$$

EXERCICE 03 : (04 points)

$$[Q,P]=i \quad ; \quad a=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q+iP) \quad ; \quad H=\hbar\omega_0\left(aa^+-\frac{1}{2}\right)$$

1. Opérateur adjoint.

$$a^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q+iP)^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q^+-iP^+)$$

Comme Q et P sont deux opérateurs hermétiques $Q=Q^+$, $P=P^+$.

$$\boxed{a^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q-iP)}$$

$a^+\neq a$ d'où l'opérateur a n'est pas hermétique.

2. Calculons le commutateur :

$$[a,a^+]=aa^+-a^+a=\frac{1}{2}(Q+iP)(Q-iP)-\frac{1}{2}(Q-iP)(Q+iP)$$

$$[a,a^+]=\frac{1}{2}(Q^2+iPQ-iQP+P^2)-\frac{1}{2}(Q^2-iPQ+iQP+P^2)$$

$$[a,a^+]=iPQ-iQP=i[P,Q]=-i[Q,P]$$

Comme $[Q,P]=i$, donc

$$\boxed{[a,a^+]=1}$$

3. Calculons l'adjoint de l'opérateur Hamiltonien

$$H^+=\hbar\omega_0\left(aa^+-\frac{1}{2}\right)^+=\hbar\omega_0\left((aa^+)^+-\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega_0\left((a^+)^+a^+-\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega_0\left(aa^+-\frac{1}{2}\right)=H$$

D'où l'opérateur Hmiltonien est Hermétique

4. Calculons le commutateur $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{H}]$.

$$[a,H]=aH-Ha$$

$$[a,H]=\hbar\omega_0 a\left(aa^+-\frac{1}{2}\right)-\hbar\omega_0\left(aa^+-\frac{1}{2}\right)a=\hbar\omega_0\left(aaa^+-\frac{1}{2}a\right)-\hbar\omega_0\left(aa^+a-\frac{1}{2}a\right)$$

$$[a,H]=\hbar\omega_0(aaa^+-aa^+a)=\hbar\omega_0 a(aa^+-a^+a)=\hbar\omega_0 a[a,a^+]$$

Comme $[a,a^+]=1$, donc

$$\boxed{[a,H]=\hbar\omega_0 a}$$

Calculons le commutateur $[\boldsymbol{a}^+,\boldsymbol{H}]$.

$$[a^+,H]=a^+H-Ha^+$$

$$[a^+,H]=\hbar\omega_0 a^+\left(aa^+-\frac{1}{2}\right)-\hbar\omega_0\left(aa^+-\frac{1}{2}\right)a^+=\hbar\omega_0\left(a^+aa^+-\frac{1}{2}a^+\right)-\hbar\omega_0\left(aa^+a^+-\frac{1}{2}a^+\right)$$

$$[a^+,H]=\hbar\omega_0(a^+aa^+-aa^+a^+)=\hbar\omega_0(a^+a-aa^+)a^+=-\hbar\omega_0[a,a^+]a^+$$

Comme $[a,a^+]=1$, donc

$$\boxed{[a^+,H]=-\hbar\omega_0 a^+}$$