

# Résumé du cours Électricité et Magnétisme

9 février 2014

# Chapitre 1

## Interaction Électrique

Une charge est dite à l'équilibre si elle est immobile. La résultante des forces qui lui sont appliquées est alors nulle. L'électrostatique est l'étude du champ et du potentiel électriques créés par des charges électriques à l'équilibre. On y étudie aussi l'effet du champ sur des charges d'essai. Celles-ci subissent l'effet d'un champ sans influencer ce dernier.

### 1.1 Charges électriques

La charge électrique est une propriété de la matière mise en évidence par l'attraction ou la répulsion des corps.

La matière se charge positivement (vitreuse) ou négativement (résineuse) par frottement, par contact avec un corps chargé ou un générateur et par influence.

**Les charges de même signe se repoussent et les charges de signes opposés s'attirent.**

Un classement triboélectrique pour l'électrisation par frottement est le suivant (tribo = frottement) : **poil de lapin, verre, mica, laine, poil de chat, soie, bois, Ambre, résine, soufre, ébonite, celluloïd.**

Le frottement de deux corps charge positivement celui qui est classé avant l'autre. Le dernier se charge négativement.

**Exemple :** frottement verre-résine charge le verre positivement et la résine négativement.

Les isolants sont des matériaux qui se chargent localement (la charge ne peut pas circuler dans un isolant).

Les métaux sont des matériaux qui se chargent en totalité (la charge circule librement dans un métal).

**Interprétation microscopique :** la charge est un surplus ou un déficit d'électrons. La charge d'un électron est  $q = -e$  où  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C. Toute autre charge est  $Q = \pm ne$  où  $n$  est entier (quantification de la charge).

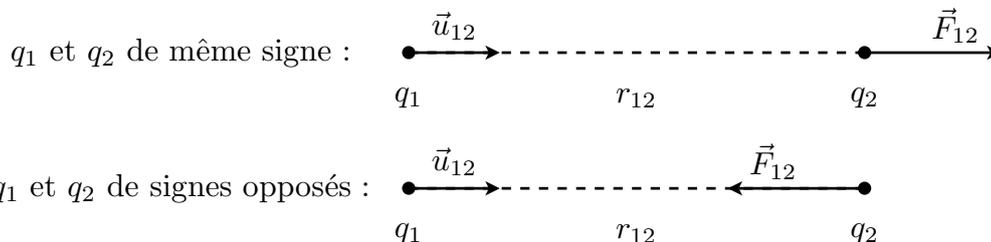
**Principe de conservation de la charge :** la charge totale  $Q$  d'un système électriquement isolé reste constante.

$$Q_{finale} = Q_{initiale}$$

## 1.2 Loi de Coulomb (forces électrostatiques)

Force exercée par une charge  $q_1$  sur une charge  $q_2$  :

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}$$



où  $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  en unités SI.

Alors  $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$  est la permittivité électrique du vide (dans la matière, on utilise  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  où  $\epsilon_r$  est la permittivité relative de la matière par rapport au vide).

$\vec{u}_{12}$  est un vecteur unitaire dirigé de la charge qui **crée la force** ( $q_1$ ) **vers** la charge qui **subit la force** ( $q_2$ ).

$r_{12}$  est la distance entre les deux charges.

## 1.3 Énergie potentielle de deux charges

Supposons que  $q_1$  soit immobile à l'origine du repère et que  $q_2$  se déplace sur une courbe  $C$  liant deux points  $A$  et  $B$ . Comme  $r_{12} = r$ ,  $\vec{u}_{12} = \vec{u}_r$  et  $d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta$ , le travail élémentaire de  $\vec{F}_{12}$  est

$$dW(\vec{F}_{12}) = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{l} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} dr$$

En posant

$$E_p(r) = K \frac{q_1 q_2}{r} + C$$

on trouve que la force de Coulomb dérive d'un potentiel car

$$dE_p = -\vec{F}_{12} \cdot d\vec{l} \iff \vec{F}_{12} = -\vec{\nabla} E_p = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r$$

Le travail entre  $A$  et  $B$  ne dépend pas du chemin suivi et est égal à

$$W_A^B(\vec{F}_{12}) = \int_C \vec{F}_{12} \cdot d\vec{l} = -(E_p(r_B) - E_p(r_A))$$

$E_p(r)$  est l'énergie potentielle de la charge  $q_2$  quand elle est distante de  $r$  par rapport à  $q_1$ . C'est aussi l'énergie potentielle de  $q_1$  et l'énergie interne du système des deux charges (voir chap. 2). La constante  $C$  se détermine par une condition arbitraire. On choisit

$$E_p(\infty) = 0 \text{ J} \implies C = 0 \implies E_p(r) = K \frac{q_1 q_2}{r}$$

# Chapitre 2

## Électrostatique

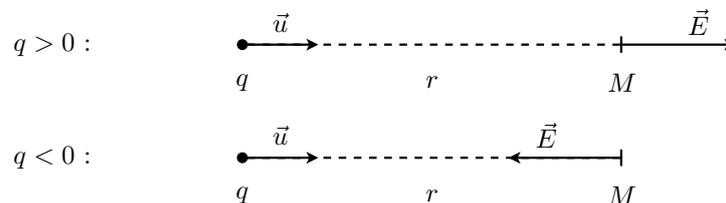
### 2.1 Champ et potentiel électriques

#### 2.1.1 Champ et potentiel

Une charge ponctuelle  $q$  crée un champ électrique  $\vec{E}(M)$  et un potentiel électrique  $V(M)$  en chaque point  $M$  de l'espace :

$$\vec{E}(M) = K \frac{q}{r^2} \vec{u}; \quad V(M) = K \frac{q}{r}$$

où  $r$  est la distance entre  $q$  et  $M$ . Le vecteur unitaire  $\vec{u}$  est dirigé de  $q$  vers  $M$ .



#### 2.1.2 Principe de superposition

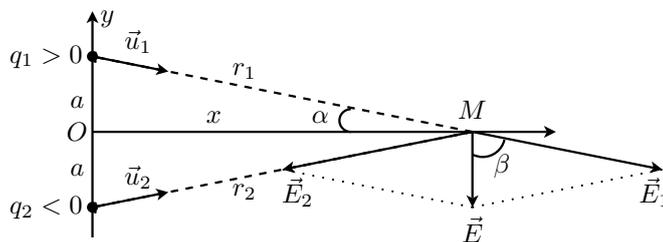
##### 2.1.2.1 Charges ponctuelles

La charge  $Q = \sum_{i=1}^N q_i$  crée un champ  $\vec{E}(M)$  et un potentiel  $V(M)$ , tels que

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(M) \iff E_x(M) = \sum_{i=1}^N E_{ix}(M), \dots$$
$$V(M) = \sum_{i=1}^N V_i(M) = V_1(M) + \dots + V_N(M)$$

où  $\vec{E}_1$  et  $V_1$  sont créés par la charge ponctuelle  $q_1$ , etc...

**Exemple : Champ créé par deux charges égales sur la médiane du segment qui les sépare**



**Cas 1 : charges opposées**  $q_1 = q > 0$  et  $q_2 = -q$ .

Champ :

$\|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_2\| = K \frac{|q|}{x^2+a^2}$ . A cause de la symétrie,  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  est parallèle à  $(y'Oy)$  et dirigé vers le bas. Dans les deux cas :  $\|\vec{E}\| = 2 \|\vec{E}_1\| \cos \beta$  avec  $\cos \beta = \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$ . Par conséquent,

$$E_x = 0, \quad E_y = -\|\vec{E}\| = -K \frac{2qa}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \vec{E} = -K \frac{2qa}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{j}$$

Potentiel :

$$V = K \frac{q_1}{r_1} + K \frac{q_2}{r_2} = 0 \text{ V}$$

Pour  $q < 0$  on obtient exactement les mêmes résultats. Dans le schéma, il suffira de changer les sens de  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  et  $\vec{E}$ . A la fin, on écrit  $E_y = +\|\vec{E}\| = -K \frac{2qa}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$  (car  $q < 0$ ).

**Cas 2 : charges identiques**  $q_1 = q_2 = q$  :

– Champ :  $\|\vec{E}\| = 2 \|\vec{E}_1\| \cos \alpha$  parallèle à  $(x'Ox)$  dans le sens positif. Donc

$$E_x = \|\vec{E}\| = K \frac{2qx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad E_y = 0, \quad \vec{E} = K \frac{2qx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i}$$

– Potentiel :

$$V = 2V_1 = K \frac{2q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Ces résultats sont valables pour  $q < 0$ .

### 2.1.2.2 Distribution continue

Chaque charge élémentaire  $dq$  est considérée comme ponctuelle et crée un champ  $d\vec{E}$  et un potentiel  $dV$  :

$$d\vec{E}(M) = K \frac{dq}{r^2} \vec{u}; \quad dV(M) = K \frac{dq}{r}$$

Dans le principe de superposition, les sommes deviennent des intégrales :

$$E_x(M) = \int_Q dE_x(M), \dots$$

$$V(M) = \int_Q dV(M)$$

$$Q = \int_Q dq$$

L'intégrale  $\int_Q$  se fait sur toute la région où se trouve la charge  $Q$  qui crée le champ et le potentiel. On a les distributions continues suivantes avec les densités  $\lambda$ ,  $\sigma$  ou  $\rho$  :

linéaire	surfaccique	volumique
$dq$ sur un segment $dl$	$dq$ sur une surface $dS$	$dq$ dans un volume $dV$
$dq = \lambda dl$	$dq = \sigma dS$	$dq = \rho dV$

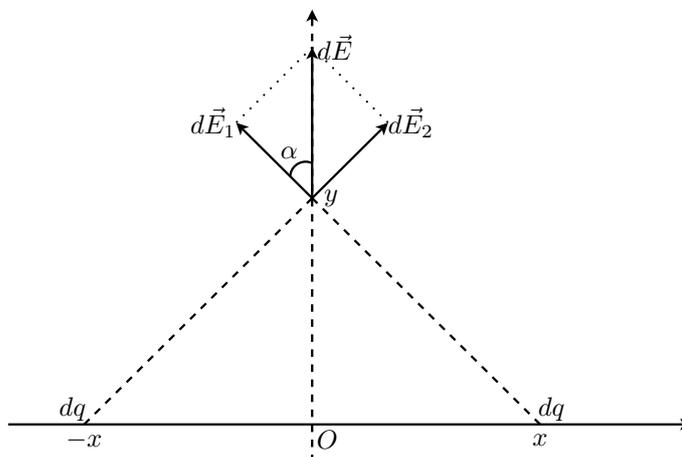
Le choix et l'expression de  $dl$ ,  $dS$  et  $dV$  dépendent du problème considéré. On les choisit de façon à faciliter les calculs. Ceci s'apprend en faisant des exercices.

Distribution uniforme (densité constante) :  $Q = \int_L \lambda dl = \lambda L$ ,  $Q = \int_S \sigma dS = \sigma S$  ou  $Q = \int_V \rho dV = \rho V$ .

**Exemples :**

Dans tous les exemples, on supposera que la distribution de charge est positive, mais le résultat sera valable pour une distribution négative (Il suffit d'inverser le sens des champs dans les schémas).

**Distribution uniforme sur une droite infinie ( $x'Ox$ )**



**Champ :** Deux charges élémentaires  $dq$ , situées en  $x$  et  $-x$ , crée le champ

$$dE_x = 0, \quad dE_z = 0, \quad dE_y = 2 \left\| d\vec{E}_1 \right\| \cos \alpha = K \frac{2dqy}{(y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad dq = \lambda dx$$

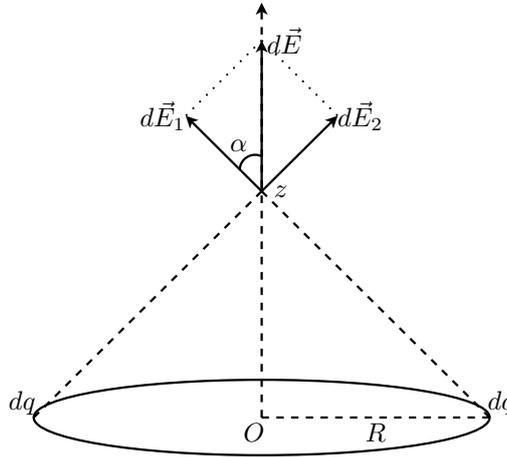
A cause de cette symétrie  $E_x = E_z = 0$  et  $E_y$  ne dépend que de  $y$ . Le champ total  $\vec{E}(y) = E_y(y)\vec{j}$  s'obtient en intégrant sur la moitié de la droite (car  $dE_y$  correspond à  $2dq$ )

$$E_y(y) = \int_{\frac{Q}{2}} dE_y = \int_0^\infty K \frac{2\lambda dx y}{(y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Le changement de variable  $x = y \tan \alpha$ , pour lequel  $dx = (y d\alpha / \cos^2 \alpha)$  et  $y^2 + x^2 = y^2(1 + \tan^2 \alpha) = (y^2 / \cos^2 \alpha)$ , donne

$$\begin{aligned} E_y(y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} K \frac{2\lambda(y d\alpha / \cos^2 \alpha)y}{(y / \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K \frac{2\lambda d\alpha \cos \alpha}{y} = K \frac{2\lambda}{y} \\ E_y(y) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \end{aligned}$$

### Distribution circulaire uniforme (boucle)



Les deux charges  $dq$  créent le champ  $d\vec{E}$  dont seule la composante sur  $Oz$  est non nulle

$$dE_z = K \frac{2dq}{(z^2 + R^2)} \cos \alpha = K \frac{2dqz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

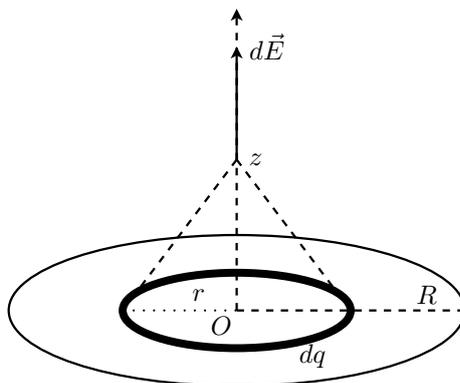
A cause de la symétrie, seule la composante  $E_z$  et non nulle. On intègre sur le demi-cercle (car  $dE_z$  correspond à  $2dq$ ). Comme  $z$  et  $R$  restent constants, on obtient

$$\begin{aligned} E_z(z) &= K \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\text{demi-cercle}} 2dq = K \frac{Qz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_z(z) &= \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{zR}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad Q = \lambda 2\pi R \end{aligned}$$

Pour le potentiel, on a

$$dV = K \frac{dq}{\sqrt{z^2 + R^2}} \implies V(z) = K \frac{Q}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

**Distribution uniforme sur un disque**



La couronne de rayon  $r$ , d'épaisseur  $dr$  et de charge  $dq$  crée un champ égal à celui d'un cercle

$$dE_z = K \frac{dqz}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La surface de la couronne est  $dS = 2\pi r dr$  et sa charge est  $dq = \sigma dS$ . Donc

$$E_z(z) = \int_{\text{Disque}} dE_z = \int_0^R K \frac{(\sigma 2\pi r dr)z}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Changement de variable  $u = z^2 + r^2$  et  $du = 2r dr$ . Donc

$$E_z(z) = K\sigma\pi z \int_{z^2}^{z^2+R^2} u^{-\frac{3}{2}} du = K\sigma\pi z \left[ \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_{z^2}^{z^2+R^2} = 2K\sigma\pi z \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \text{sign}(z) - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

Potentiel :

$$dV = K \frac{dq}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = K \frac{(\sigma 2\pi r dr)}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Donc

$$V(z) = \int_{z^2}^{z^2+R^2} K(\sigma\pi du)u^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ |z| - \sqrt{z^2 + R^2} \right]$$

Pour un plan infini  $R \gg z$  (ou  $R \rightarrow \infty$ ), on aura  $\sqrt{z^2 + R^2} \simeq R$  et  $\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \simeq 0$ . Le champ devient

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{sign}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & z < 0 \end{cases}$$

Le potentiel devient

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} [|z| - R]$$

L'origine des potentiels étant arbitraire, on peut supprimer la constante infinie  $\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$ . On obtient le potentiel que l'on utilisera souvent

$$V(z) = \frac{\sigma |z|}{2\varepsilon_0} = \begin{cases} \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}, & z \geq 0 \\ -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}, & z \leq 0 \end{cases}$$

Ce dernier est nul en  $z = 0$ .

## 2.2 Charges dans un champ et potentiel électriques

### 2.2.1 Force et énergie potentielle d'un charge ponctuelle

Considérons un charge ponctuelle  $q_i$  qui crée un champ  $\vec{E}_i(M) = K \frac{q_i}{r^2} \vec{u}$  et un potentiel  $V_i(M) = K \frac{q_i}{r}$  en chaque point  $M$  de l'espace. Si on place une autre charge  $q$  en  $M$ , elle sera soumise à la force  $\vec{F}_i(q) = K \frac{qq_i}{r^2} \vec{u} = q\vec{E}_i(M)$  et elle aura l'énergie potentiel  $E_{ip}(q) = K \frac{qq_i}{r} = qV(M)$ . Ces relations restent valables pour une charge non ponctuelle  $Q = \sum_i q_i$ , car  $\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M)$  et  $\vec{F}(q) = \sum_i \vec{F}_i(q) = \sum_i q\vec{E}_i(M) = q\vec{E}(M)$ . De même pour  $E_p$ . Par conséquent, sans se soucier de la charge  $Q$ , on peut dire :

Si une charge ponctuelle  $q$  est placée en un point  $M$  où règne un champ électrique  $\vec{E}(M)$  et un potentiel électrique  $V(M)$ , elle sera soumise à une force  $\vec{F}(q)$  et elle aura une énergie potentielle  $E_p(q)$  données par

$$\vec{F}(q) = q\vec{E}(M) \quad E_p(q) = qV(M)$$

### 2.2.2 Lien entre le champ et le potentiel

On sait que la fore  $\vec{F}_i(q)$  appliquée par une charge ponctuelle  $q_i$  à la charge ponctuelle  $q$  dérive d'un potentiel

$$\vec{F}_i(q) \cdot d\vec{l} = -dE_{pi}(q) \iff \vec{F}_i(q) = -\vec{\nabla} E_{pi}(q)$$

En faisant la somme sur  $i$ , on obtient le même chose pour la force résultante  $\vec{F}(q)$

$$\vec{F}(q) \cdot d\vec{l} = -dE_p(q) \iff \vec{F}(q) = -\vec{\nabla} E_p(q)$$

En divisant par  $q$ , on déduit que le champ  $\vec{E}$  dérive du potentiel  $V$  :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M).d\vec{l} &= -dV(M) \iff \vec{E}(M) = -\vec{\nabla}V(M) \\ dV(M) &= V(N) - V(M), \quad d\vec{l} = \vec{MN}\end{aligned}$$

Autrement dit, si l'on connaît le potentiel, on peut déterminer le champ :

$$\begin{aligned}E_x(M) &= -\frac{\partial V(M)}{\partial x}, \quad E_y(M) = -\frac{\partial V(M)}{\partial y}, \quad E_z(M) = -\frac{\partial V(M)}{\partial z} \\ E_\rho(M) &= -\frac{\partial V(M)}{\partial \rho}, \quad E_\varphi(M) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V(M)}{\partial \varphi}, \quad E_z(M) = -\frac{\partial V(M)}{\partial z} \\ E_r(M) &= -\frac{\partial V(M)}{\partial r}, \quad E_\theta(M) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V(M)}{\partial \theta}, \quad E_\varphi(M) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V(M)}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

Inversement, si l'on connaît le champ, on peut déterminer le potentiel (à une constante arbitraire près)

$$\begin{aligned}dV &= -\vec{E}(M).d\vec{l} \iff V(M) = -\int \vec{E}(M).d\vec{l} \iff V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{l} \\ d\vec{l} &= dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = dr\vec{u}_r + \rho d\varphi\vec{u}_\varphi + dz\vec{k} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{u}_\varphi\end{aligned}$$

### Remarques

- L'intégrale  $\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$  s'appelle circulation du vecteur  $\vec{E}$  le long d'une courbe (ou chemin) menant de  $A$  à  $B$ . La circulation d'un vecteur  $\vec{A}$  est l'analogue purement mathématique du travail d'une force.
- La circulation du champ électrique est indépendante du chemin.
- Dans ce cours, on aura toujours une intégrale qui se simplifie :  $E_y = E_z = 0$  et  $V(B) - V(A) = -\int_{x_A}^{x_B} E_x dx$ . Sinon, ce sera  $E_\theta = E_\varphi = 0$  et  $V(B) - V(A) = -\int_{r_A}^{r_B} E_r dr$ .

### 2.2.3 Énergie interne d'un système de charges

Pour assembler des charges  $q_i$  sans apport d'énergie cinétique, un opérateur doit les ramener une à une de l'infini avec une vitesse très faible en appliquant une force égale et opposée à la force électrique  $\vec{F}_i^{op} = -\vec{F}_i^{elec}$ . Nous aurons donc trois définitions équivalentes de l'énergie interne  $U$  d'un ensemble de charges. C'est :

- Le travail fourni par un opérateur pour assembler les charges une à une à partir d'un état d'énergie interne nulle (l'infini)

$$U = \sum_i W_{\infty}^{\vec{r}_i}(\vec{F}_i^{op})$$

- Le travail des forces électrostatiques lors de l'éloignement des charges vers des positions où le potentiel de chaque charge est nul

$$\vec{F}_i^{op} = -\vec{F}_i^{elec} \implies U = \sum_i W_{\vec{r}_i}^{\infty}(\vec{F}_i^{elec})$$

- La somme des variations des énergies potentielles  $\Delta E_p(q_i) = E_p(\vec{r}_i) - E_p(\infty)$  de chaque charge, lors de l'assemblage

$$W_{\vec{r}_i}^\infty(\vec{F}_i^{elec}) = \Delta E_p(q_i) \implies U = \sum_i \Delta E_p(q_i)$$

On peut montrer que

L'énergie interne de deux charges ponctuelles est  $U_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r} = E_p(q_1) = E_p(q_2) = U_{21}$

L'énergie interne de trois charges ponctuelles est  $U_{123} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{1}{2}(U_{12} + U_{21} + U_{13} + U_{31} + U_{23} + U_{32})$

L'énergie interne de  $N$  charges ponctuelles est

$$U = \sum_{i < j}^N U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^N U_{ij}$$

Démontrons ces relations pour  $U_{12}$  puis pour  $U_{123}$ . Ramenons d'abord  $q_2$  de l'infini (énergie interne nulle) à un point  $r_2$  dans le champ de  $q_1$ . Alors :

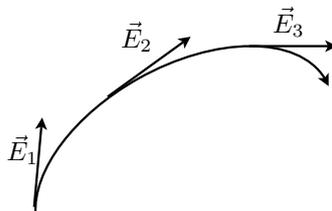
$$U_{12} = \int_\infty^r \vec{F}^{op}(q_2) \cdot d\vec{l} = - \int_\infty^{r_2} \vec{F}_{21} \cdot d\vec{l} = E_p(r_2) - E_p(\infty) = E_p(r_2) = E_p(q_2).$$

Ramenons maintenant  $q_3$  à  $r_3$ , dans le champ de  $q_1$  et  $q_2$  :

$$U_{123} = U_{12} + \int_\infty^{r_3} \vec{F}^{op}(q_3) \cdot d\vec{l} = U_{12} - \int_\infty^{r_3} [\vec{F}_{13}(q_3) + \vec{F}_{23}(q_3)] \cdot d\vec{l} = U_{12} + U_{13} + U_{23}.$$

## 2.3 Topographie du champ électrique

Une ligne de champ et une ligne qui est tangente au champ électrique en chacun de ses points. Elle est orientée dans le sens du champ (elle sort des charges positives et entre dans les charges négatives).



Un tube de champ est une surface formée par des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé. Une surface équipotentielle  $V$  est une région où le potentiel est constant ( $V(M) = V$ ).

La relation  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$  implique que :

- Le champ électrique (ligne de champ aussi) est perpendiculaire à l'équipotentielle  $V$  : On choisit  $d\vec{l}$  sur  $V$  (Fig.1) :  $0 = dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \implies \vec{E} \perp d\vec{l}$
- Deux équipotentielles,  $V_1$  et  $V_2$ , se rapprochent plus dans les régions où le champ électrique est plus intense. On choisit les  $d\vec{l}$  parallèles aux  $\vec{E}$  (Fig.2) :  $|V_2 - V_1| = E dl = E' dl'$ . Donc  $dl < dl' \implies E > E'$ .

- Le champ (ligne de champ aussi) est orienté dans le sens des potentiels décroissants. On choisit les  $d\vec{l}$  parallèles aux  $\vec{E}$  (Fig.2) :  $\vec{E}.d\vec{l} > 0$  et  $V_2 - V_1 = -\vec{E}.d\vec{l} < 0 \implies V_2 < V_1$ .

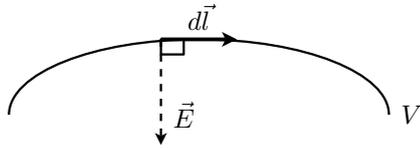


Fig. 1

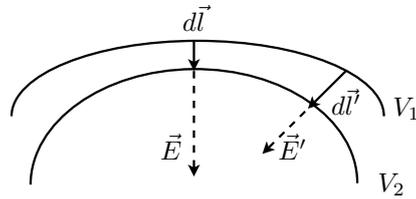
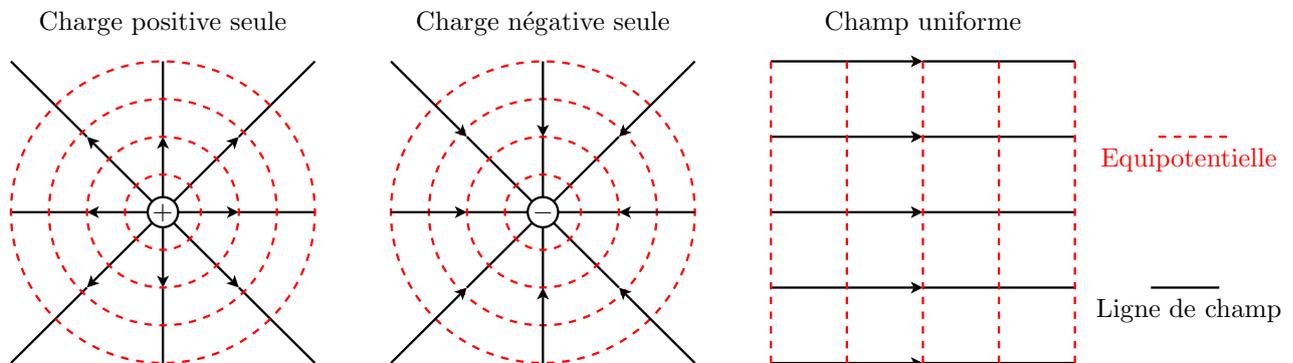


Fig. 2

Exemples :

Charges ponctuelles et champ uniforme :



Pour le champ uniforme

- $\vec{E} = \vec{C} \implies \Delta V = -\vec{E}.\vec{\Delta l}$  :
- les lignes de champ sont des droites parallèles. Les équipotentielles sont des plans perpendiculaires aux lignes de champ.
- En choisissant  $\vec{\Delta l} \parallel \vec{E}$ , on obtient  $\Delta V = -E\Delta l$  et
  - $E = -\frac{\Delta V}{\Delta l}$
  - $\Delta V_1 = \Delta V_2 \implies \Delta l_1 = \Delta l_2$ . Les équipotentielles sont équidistantes pour une même variation du potentiel.

## 2.4 Le dipôle électrique

Le dipôle électrique est un ensemble de deux charges égales et opposées séparées par une distance  $a$ . Le moment dipolaire électrique d'un dipôle est défini par

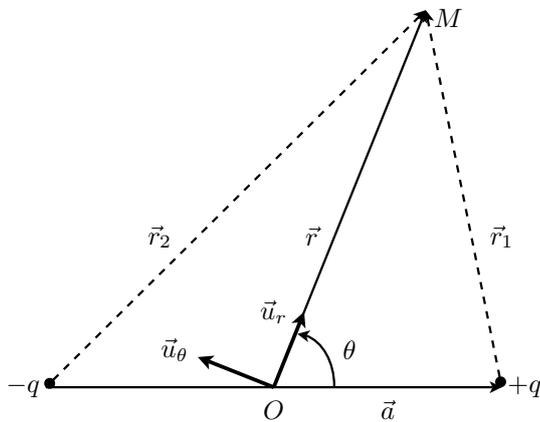
$$\vec{p} = q\vec{a}, \quad q > 0$$

Le vecteur  $\vec{a}$  est dirigé de la charge négative ( $-q$ ) vers la charge positive ( $+q$ ).

### 2.4.1 Champ et potentiel créés par un dipôle

Le dipôle crée en chaque point  $M(r, \theta)$ , très éloigné dans l'espace ( $\frac{a}{r} \ll 1$ ), un potentiel et un champ donnés en coordonnées polaires par

$$\begin{aligned} V(M) &= K \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{Kp \cos \theta}{r^2} \\ E_r(M) &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2Kp \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta(M) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{Kp \sin \theta}{r^3} \end{aligned}$$

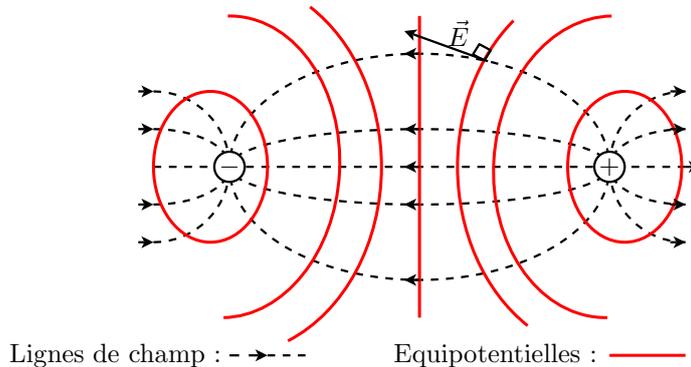


Le calcul de  $V$  se fait comme suit :

$V(M) = Kq(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) = Kq \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$  avec  $\vec{r}_1 = \vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}$  et  $\vec{r}_2 = \vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}$ . Au premier ordre en  $\frac{a}{r}$  (c'est-à-dire  $\frac{a^2}{r^2} \simeq 0$ ), on aura :

$r_1 = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} - \vec{r} \cdot \vec{a}} \simeq r \sqrt{1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{r^2}} \simeq r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{2r}$ . De même  $r_2 \simeq r + \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{2r}$ . Ainsi  $r_2 - r_1 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{r}$  et  $r_1 r_2 = r^2 - (\frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{2r})^2 \simeq r^2$ . Ce qui donne  $V = K \frac{\vec{r} \cdot q \vec{a}}{r^3}$ .

Les lignes de champ et les équipotentielles du dipôle sont (schéma qualitatif) :



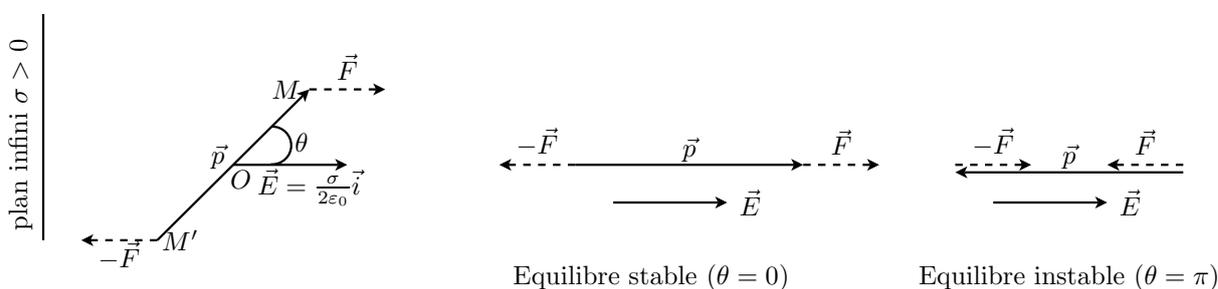
### 2.4.2 Dipôle dans un champ uniforme

On place le dipôle dans un champ électrique  $\vec{E}$  uniforme (créé par un plan infini uniformément chargé, par exemple). Alors, le dipôle aura une énergie potentielle  $E_p$  et sera soumis à un couple de moment  $\vec{\tau}$  par rapport au milieu de  $a$  :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\|\vec{p}\| \|\vec{E}\| \cos(\theta)$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}, \quad \|\vec{\tau}\| = \|\vec{p}\| \|\vec{E}\| |\sin(\theta)|$$

En effet,  $E_p = E_p(q) + E_p(-q) = q(V(M) - V(M')) = q(-\vec{E} \cdot \vec{M}'M) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ .  
 $\vec{\tau} = \vec{OM} \wedge \vec{F} - \vec{OM}' \wedge \vec{F} = \vec{M}'M \wedge \vec{F} = \vec{M}'M \wedge q\vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}$



#### Remarques

- Le champ  $\vec{E}$  est créé par d'autres charges et ne doit pas être confondu avec le champ créé par le dipôle.
- La position d'équilibre stable du dipôle correspond à  $E_p$  minimale ( $\cos(\theta) = 1$ ). Donc  $\vec{p}$  est parallèle et dans le même sens que  $\vec{E}$ .
- La position d'équilibre instable du dipôle correspond à  $E_p$  maximale ( $\cos(\theta) = -1$ ). Donc  $\vec{p}$  est parallèle et dans le sens opposé à  $\vec{E}$ .
- Dans les deux positions d'équilibre (stable et instable), on a  $\vec{\tau} = \vec{0}$  car  $\vec{p} \parallel \vec{E}$ .

## 2.5 Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss permet de calculer rapidement le champ électrique créé par les distributions de charges symétriques (qui ont une bonne forme). Au préalable, on doit définir la notion de flux du champ électrique à travers une surface.

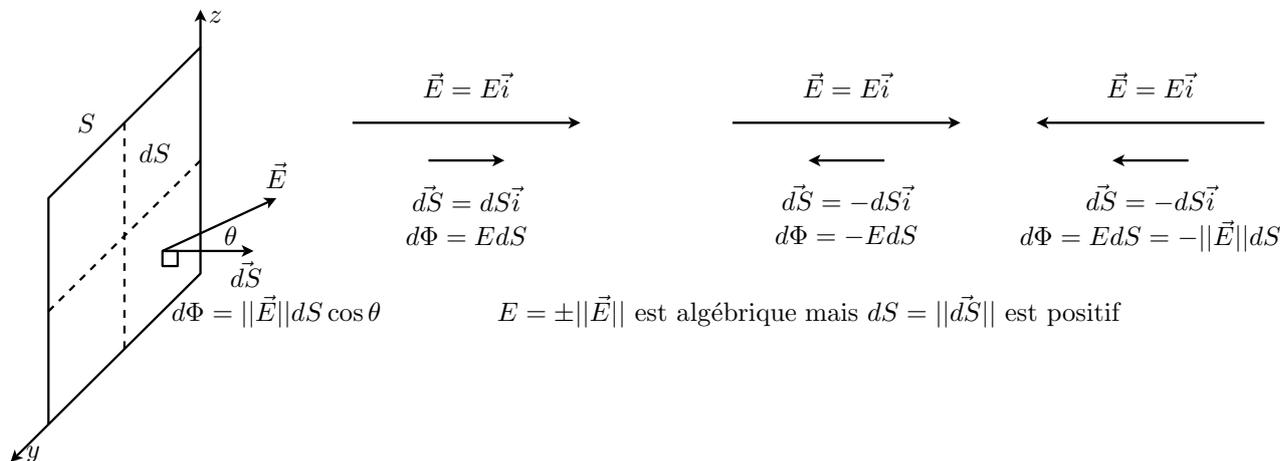
### 2.5.1 Flux du champ électrique

Subdivisons une surface  $S$  en plusieurs surfaces élémentaires (infiniment petites)  $dS$ . Pour chaque surface élémentaire, définissons un vecteur  $d\vec{S}$  qui lui est normal et tel que  $\|d\vec{S}\| = dS > 0$ . Le flux élémentaire

du champ électrique  $\vec{E}$  à travers  $dS$  est défini par

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \|\vec{E}\| dS \cos \theta$$

Voici quelques exemples :

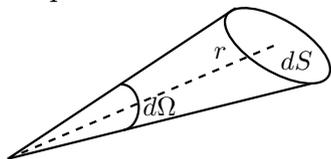


Le flux du champ à travers  $S = \int_S dS$  est

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

**Remarques**

- Au lieu de la notation en double intégrale ( $\iint$ ), on a adopté la notation  $\int_S$ .
- Si  $\|\vec{E}\|$  et  $\theta$  sont constants sur  $S$ , alors  $\Phi = \|\vec{E}\| \cos \theta \int_S dS = \|\vec{E}\| S \cos \theta$ . Si de plus  $\vec{E} \parallel \pm d\vec{S}$ , on obtient les deux cas particuliers suivants (très utilisés dans les exercices  $\|\vec{u}\| = 1$ ) :
  - $\theta = 0 \implies \Phi = \|\vec{E}\| S$ . Algébriquement :  $\vec{E} = E\vec{u}$  et  $d\vec{S} = dS\vec{u} \implies d\Phi = EdS \implies \Phi = ES$
  - $\theta = \pi \implies \Phi = -\|\vec{E}\| S$ . Algébriquement :  $\vec{E} = E\vec{u}$  et  $d\vec{S} = -dS\vec{u} \implies d\Phi = -EdS \implies \Phi = -ES$
- Par convention, si la surface  $S$  est fermée, tous ses  $d\vec{S}$  doivent pointer vers l'extérieur de  $S$ .
- Pour un élément de surface sphérique, on a  $dS = r^2 d\Omega$ , où  $r$  est la distance entre  $dS$  et le centre de la sphère.



$d\Omega$  est appelé angle solide. En coordonnées sphériques  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Pour toute la sphère,  $\Omega = \int_S d\Omega = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi$  et  $S = \int_S dS = \int_S R^2 d\Omega = 4\pi R^2$ .

### 2.5.2 Théorème

Considérons une charge  $Q$  répartie dans l'espace d'un manière quelconque. Choisissons n'importe quelle surface géométrique (non matérielle) fermée  $S_G$ . Le théorème de Gauss stipule que le flux du champ électrique à travers la surface de Gauss  $S_G$  est égal à la charge  $Q_{int}$  qui se trouvent à l'intérieur de  $S_G$  divisée par  $\epsilon_0$  :

$$\Phi = \int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0},$$

Les figures 1 et 2 démontrent et explique le théorème pour une seule charge ponctuelle sachant que  $\|\vec{E}\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ ,  $dS = r^2 d\Omega$  et  $\Omega = 4\pi$ .

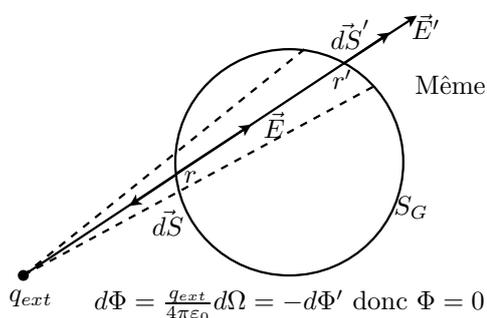


Fig. 1

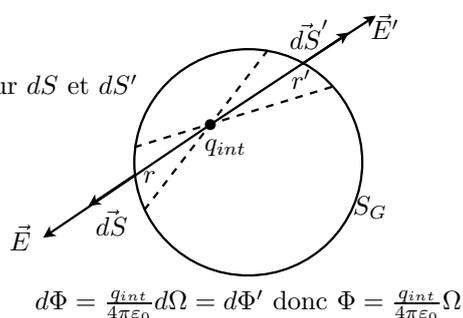


Fig. 2

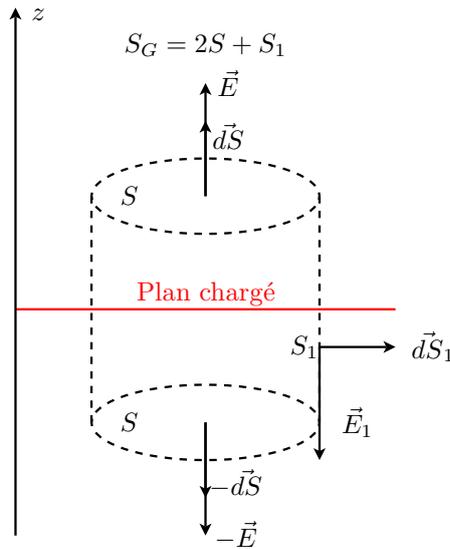
#### Remarques

- On choisit  $S_G$  fermée mais sous la forme qu'on veut (généralement, de façon à simplifier les calculs).
- Si le milieu considéré n'est pas le vide, on remplace  $\epsilon_0$  par  $\epsilon$ .

### 2.5.3 Cas particuliers importants

#### Plan infini

La charge est uniformément (densité  $\sigma$  constante) répartie sur un plan infini confondu avec  $xOy$ .  $S_G$  est un cylindre de base  $S$  et de surface latérale  $S_1$ . Le plan chargé est un plan de symétrie pour  $S_G$ . On suppose que  $\sigma > 0$ .



A cause de la symétrie  $\vec{E} = E\vec{k}$  avec  $E$  constant sur  $S$  ( $E$  ne peut dépendre que de  $z$ ). Comme  $d\vec{S} = dS\vec{k} \parallel \vec{E}$ , on trouve  $\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_S (-\vec{E}) \cdot (-d\vec{S}) + \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2ES + 0$ . Le théorème de Gauss donne  $2ES = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$  avec  $Q_{int} = \sigma S$ . Donc  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  et  $\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{k} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{k} & z < 0 \end{cases}$ .

Important : Cette formule est valable pour une densité  $\sigma$  négative. Elle doit être apprise.

**Sphère**

La charge algébrique  $Q$  est uniformément répartie sur (ou à l'intérieur) d'une sphère  $S$  de rayon  $R$ . On choisit  $S_G = 4\pi r^2$  sphérique de rayon  $r$  avec :

1.  $r < R$  si on veut calculer le champ à l'intérieur de la sphère chargée Fig.1 (le sens du champ a été dessiné arbitrairement).
2.  $r > R$  si on veut calculer le champ à l'extérieur de la sphère chargée Fig.2.

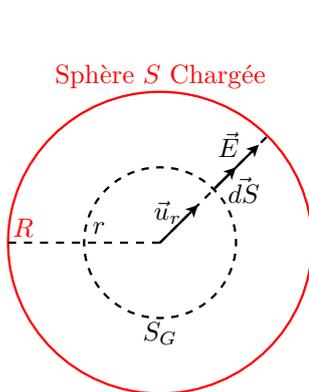


Fig.1

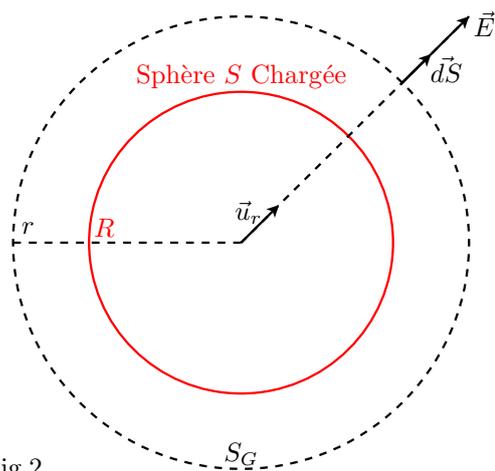


Fig.2

Dans les deux cas, à cause de la symétrie, on a  $\vec{E} = E\vec{u}_r$  avec  $E$  constant sur  $S_G$ . Comme  $d\vec{S} = dS\vec{u}_r \parallel \vec{E}$ , donc  $\Phi = ES_G = E4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ . Par conséquent

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{int}}{r^2} \vec{u}_r$$

Il suffit de déterminer  $Q_{int}$  géométriquement dans chaque cas et construire le tableau suivant :

	Répartition en surface (densité $\sigma$ )	Répartition en volume (densité $\rho$ )
$r < R$	$Q_{int} = 0 \implies \vec{E}(M) = \vec{0}$	$Q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \implies \vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \vec{u}_r$
$r > R$	$Q_{int} = Q = \sigma 4\pi R^2 \implies \vec{E}(M) = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$	$Q_{int} = Q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \implies \vec{E}(M) = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$

### Cylindre de hauteur infinie

La charge  $Q$  est uniformément répartie sur la surface ou à l'intérieur d'un cylindre infini de rayon  $R$ . On choisit  $S_G = S_1 + S_2 + S_3$  un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $L$  ( de surface latérale  $S_1$  et de base  $S_2 = S_3$ ).

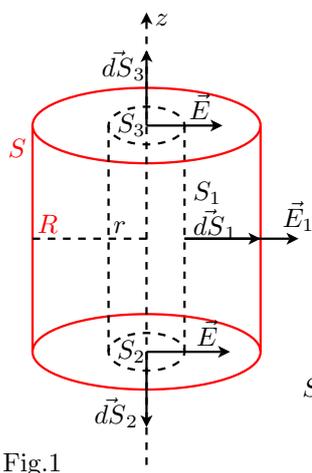


Fig.1

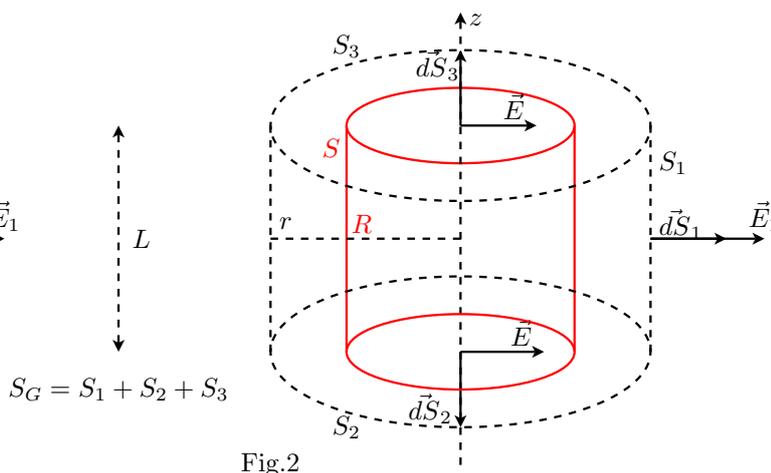


Fig.2

A cause de la symétrie, on a  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = 0$ ,  $\vec{E} = E\vec{u}_r$  avec  $E$  constant sur  $S_1$ . Comme  $d\vec{S}_1 = dS\vec{u}_r \parallel \vec{E}$ , donc  $\Phi = ES_1 = E2\pi rL = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$  et par conséquent :

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q_{int}}{rL} \vec{u}_r$$

	Répartition en surface (densité $\sigma$ )	Répartition en volume (densité $\rho$ )
$r < R$	$Q_{int} = 0 \implies \vec{E}(M) = \vec{0}$	$Q_{int} = \rho \pi r^2 L \implies \vec{E}(M) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \vec{u}_r$
$r > R$	$Q_{int} = \sigma 2\pi RL \implies \vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r$	$Q_{int} = \rho \pi R^2 L \implies \vec{E}(M) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r$

**Fil infini**

La charge  $Q$  est uniformément répartie sur une droite infiniment longue. On fait comme pour l'extérieur d'un cylindre mais avec  $Q_{int} = \lambda L$ . Donc :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

**Important :**

- Pour la répartition en surface (sphère et cylindre), le champ est nul à l'intérieur. Ce résultat est général est valable pour n'importe quelle répartition en surface (pas obligatoirement sphérique ou cylindrique).
- A l'extérieur de la sphère chargée (en surface ou en volume), l'expression du champ est identique à celle d'une charge ponctuelle  $Q$ .
- Ces deux remarques ainsi que l'expression du champ créé par un plan infini doivent être apprises par cœur car très utilisées dans la suite du cours.

# Chapitre 3

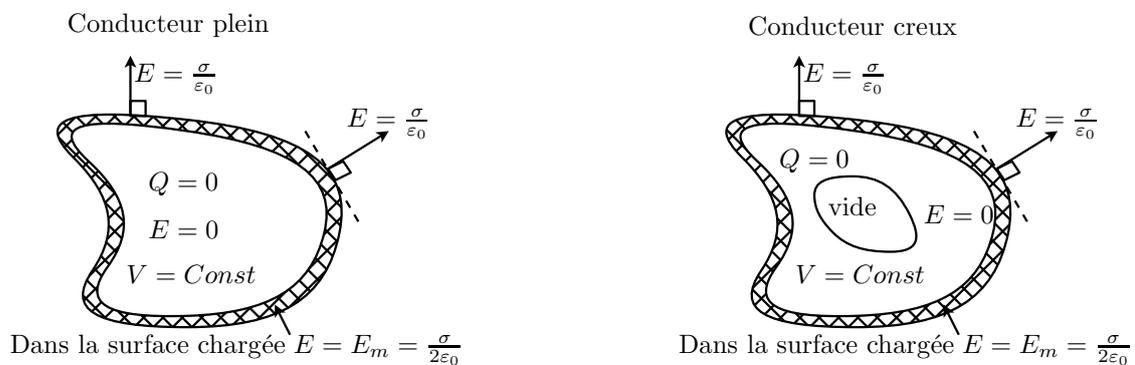
## Conducteurs

### 3.1 Conducteurs en équilibre électrostatique

#### 3.1.1 Définition

Un conducteur est un corps dans lequel certaines charges (électrons) peuvent se déplacer librement. Ce conducteur est en équilibre électrostatique si toutes ses charges libres sont immobiles (la résultante des forces électrostatiques appliquées à chaque charge  $q$  est nulle  $\vec{F} = q\vec{E} = \vec{0}$ , donc  $\vec{E} = \vec{0}$ ).

#### 3.1.2 Propriétés



Si le conducteur est en équilibre alors :

#### a) En volume (intérieur du conducteur)

Le champ  $\vec{E}$  et la charge  $Q_{int}$  à l'intérieur du conducteur sont nuls. Le potentiel est constant. En effet,

$$\vec{F} = \vec{0} \implies \vec{E} = \vec{0} \implies \begin{cases} V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} & = C \\ \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} & = 0 \end{cases}$$

où  $S_G$  peut être n'importe quelle surface à l'intérieur du conducteur.

**b) En surface**

La charge  $Q$  du conducteur se répartit sur la surface car elle ne peut pas être à l'intérieur.

Le champ juste à l'extérieur est perpendiculaire à la surface et vaut  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

En réalité les charges se répartissent sur une très petite épaisseur de la surface. Dans cette épaisseur, il y a :

- un champ moyen  $E_m = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ,
- une force élémentaire  $dF = dqE_m$  appliquée à chaque charge élémentaire  $dq = \sigma dS$ ,
- une pression électrostatique  $p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ .

**c) Conducteurs creux**

La charge d'un conducteur creux, **en équilibre et seul dans l'espace**, se répartit sur la surface extérieure. La surface intérieure et le volume ne portent aucune charge.

**Exemple très important (conducteur sphérique plein ou creux)**

Soit  $R$  le rayon d'un conducteur sphérique. Sa surface est  $S = 4\pi R^2$ . La charge sur cette surface est  $Q = \sigma 4\pi R^2$ . Les résultats du théorème de Gauss nous ont appris que le champ et le potentiel à l'extérieur du conducteur sont identiques à ceux d'une charge ponctuelle

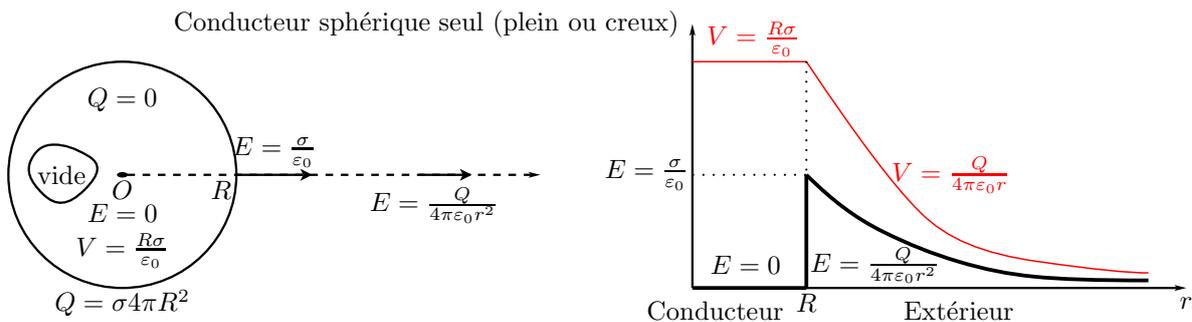
$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad r > R$$

Ces formules sans valables juste à l'extérieur de la surface  $r = R$ ,

$\vec{E}(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \vec{u}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r$  on retrouve l'expression du champ juste à l'extérieur du conducteur.

$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{R\sigma}{\epsilon_0}$  Comme le potentiel est une fonction continue, ce résultat est en même temps le potentiel :

- juste à l'extérieur,
- au niveau de la surface même du conducteur,
- à l'intérieur du conducteur car il y est constant. Si le conducteur est creux, ce sera aussi le potentiel de la cavité (vide).



**d) Pouvoir des pointes**

Deux conducteurs sphériques de rayons  $R_1$  et  $R_2$  portent des charges  $Q_1$  et  $Q_2$  et sont liés par un fil conducteur très long. Étant très éloignés, on peut leur appliquer les formules du conducteur sphériques isolé

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}, \quad V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

Étant liés, ils constituent un seul conducteur de potentiel constant ( $V_1 = V_2$ ). Par conséquent,

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

Plus le rayon de la surface est grand, plus sa charge est plus grande. Mais  $Q_1 = \sigma_1 4\pi R_1^2$  et  $Q_2 = \sigma_2 4\pi R_2^2$ , ainsi la relation précédente devient :

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

Plus la surface du conducteur est pointue (rayon petit), plus sa densité de charge est plus grande. Dans le cas extrême, la densité est tellement forte qu'une décharge ou étincelle se produit. C'est le pouvoir des pointes.

Applications : paratonnerre, briquets électriques, chaînes métalliques des voitures, pointes sur les ailes des avions, toucher des appareils électriques avec la paume de la main au lieu des doigts.

### 3.1.3 Capacité propre d'un conducteur seul dans l'espace

La charge d'un conducteur seul dans l'espace est proportionnelle à son potentiel

$$Q = VC$$

La constante de proportionnalité  $C$  s'appelle capacité propre du conducteur. Unité : Farad (F),  $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$ . Elle ne dépend que de la géométrie du conducteur.

**Capacité propre d'un conducteur sphérique :**  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$ . Donc  $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$ .

L'exemple du conducteur sphérique nous apprend la méthode de calcul de  $C$  :

- Le théorème de Gauss permet de déterminer  $\vec{E}$  en fonction de  $Q$ .
- La circulation du champ ( $-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ) permet de déterminer  $V$  en fonction de  $Q$ .
- Le rapport  $Q/V$  donne  $C$ .

### 3.1.4 Énergie interne

Les trois définitions de l'énergie interne  $U$  d'un ensemble de charges se traduisent comme suit pour un conducteur :

- Le travail fourni par un opérateur pour charger le conducteur.
- Le travail des forces électrostatiques lors de la décharge du conducteur.
- La somme des variations des énergies potentielles  $\Delta E_p$  de chaque charge, lors de la charge du conducteur.

Appliquons la dernière définition. Le conducteur ayant une charge  $q$  et un potentiel  $v$ , on lui ajoute une charge  $dq$  (initialement à l'infini). Alors :

Charge $dq$ à l'infini			Charge $dq$ dans le conducteur	
	Conducteur	charge $dq$		Conducteur
Potentiel	$v$	0	Potentiel	$v + dv$
Charge	$q$	$dq$	Charge	$q + dq$

On voit que

$$\Delta E_p(dq) = E_p(dq \in \text{Conducteur}) - E_p(dq \in \infty) = dq(v + dv) - 0 = dqv$$

On a négligé  $dqdv$  qui est du second ordre. La variation de l'énergie interne  $u$  du conducteur est

$$du = \Delta E_p(dq) = dqv = dq \frac{q}{C}$$

Le conducteur passe de l'état initial déchargé ( $q = 0, v = 0, u = 0$ ) à un état final chargé ( $q = Q, v = V, u = U$ ). Par conséquent

$$U = \int_0^U du = \int_0^Q dq \frac{q}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

En utilisant,  $Q = VC$ , on trouve

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

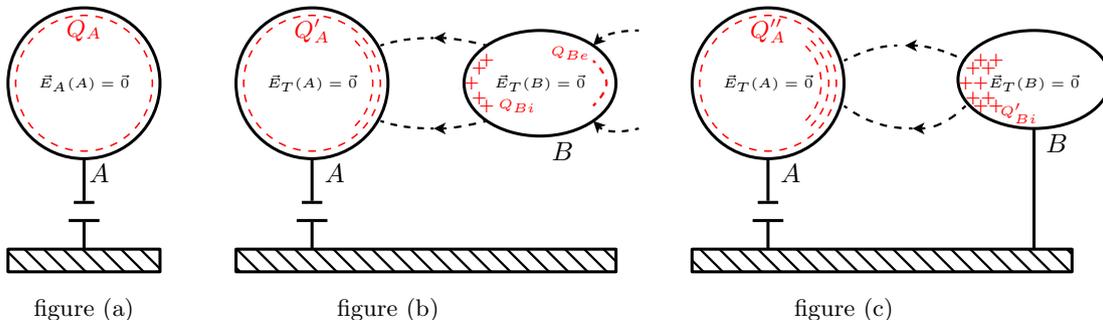
**Remarque :**

Pour charger le conducteur, on le relie à un générateur de différence de potentiel  $V$  constante. Il fournit à la charge  $Q$ , qui le traverse, l'énergie  $W = \int_0^Q dqV = QV$ . La moitié de cette énergie est fournie au conducteur et l'autre moitié est perdue sous forme de chaleur (voir effet Joule).

### 3.2 Phénomène d'influence

#### 3.2.1 Influence partielle

Soit  $A$  un conducteur un conducteur portant une charge négative  $Q_A$  (figure a).



Soit  $B$  un conducteur neutre que l'on place le champ extérieur  $\vec{E}_A$  créé par le conducteur  $A$  (figure b). Les charges négatives de  $A$  attirent les charges positives de  $B$  et repoussent les charges négatives. On a une nouvelle répartition des charges de  $B$  à cause de la présence du corps chargé  $A$ . C'est le phénomène d'influence. Maintenant, les charges positives de  $B$  attirent encore plus de charges négatives de  $A$ . C'est donc un phénomène d'influence mutuelle qui s'arrête quand chaque conducteur atteint son état d'équilibre. Pour pouvoir décrire ce phénomène avec des équations, expliquons le en termes de champ électrique :

- Le champ  $\vec{E}_A(B)$  créé dans  $B$  par  $A$  déplace les électrons libres de  $B$  dans le sens opposé au sien. Il apparaît une charge positive  $Q_{Bi}$  sur la face de  $B$  qui est en regard avec  $A$ , et une charge positive  $Q_{Be}$  (un manque d'électrons) sur l'autre face de  $B$ .
- La nouvelle répartition dans  $B$  (c'est-à-dire  $Q_{Bi}$  et  $Q_{Be}$ ) crée un champ  $\vec{E}_B(A)$  qui n'est pas nul et qui va influencer le conducteur  $A$ . La charge  $Q_A$  augmente et devient  $Q'_A$ . Cette augmentation est assurée par le générateur. Ainsi, pour le même potentiel et juste à cause de l'influence de  $B$ , le conducteur  $A$  a pu supporter une charge plus grande (sa capacité a augmenté). On dit que la charge s'est condensée (devenue plus dense) dans  $A$ . C'est le phénomène de condensation.
- Les équations qui décrivent ce phénomène sont :
  - Équilibre de  $A$  : le champ total  $\vec{E}_T(A)$ , créé par les répartitions finales des charges de  $A$  et de  $B$ , est nul à l'intérieur de  $A$  (de même pour  $B$ ) :

$$\vec{E}_T(A) = \vec{E}_A(A) + \vec{E}_B(A) = \vec{0}, \quad \vec{E}_T(B) = \vec{E}_A(B) + \vec{E}_B(B) = \vec{0}$$

- Le potentiel de  $A$  est constant (générateur) :

$$V(A) = V_0$$

- Conservation des charges de  $B$  (neutre et isolé) :

$$Q_{Bi} + Q_{Be} = Q_{B0} = 0$$

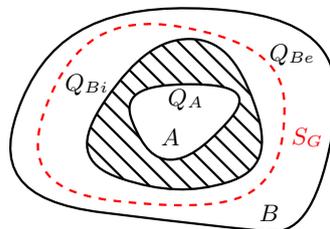
Remarques :

- Une partie seulement des lignes de champ quittant  $B$  arrive en  $A$ . L'influence est dite partielle. On admet que ceci implique que  $|Q'_A| > |Q_{Bi}|$ .
- Si l'on relie  $B$  à la terre (figure c), il constituera avec elle un seul conducteur et la charge  $Q_{Be}$  passe à la terre (aucune ligne de champ n'entre dans  $B$ ). L'équation de conservation de la charge de  $B$  n'est plus valide. On la remplace par

$$V(B) = V(\text{terre}) = 0 \text{ V} \quad \text{et} \quad Q_{Be} = 0 \text{ C}$$

### 3.2.2 Influence totale

On parle d'influence totale quand le conducteur  $B$  entoure complètement le conducteur  $A$ .



**1. Charge  $Q_{Bi}$  sur la surface interne de  $B$  :**

On choisit une surface de Gauss  $S_G$  à l'intérieur de  $B$  où  $\vec{E}_T(B) = \vec{0}$ . Le théorème de Gauss conduit à

$$\int_{S_G} \vec{E}_T(A) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \implies 0 = Q_{int} = Q_A + Q_{Bi}$$

Par conséquent, dans le cas de l'influence totale, les surfaces en regard de  $A$  et de  $B$  portent des charges opposées

$$Q_{Bi} = -Q_A$$

Cette équation importante peut être vue comme une définition plus générale de l'influence totale qui s'appliquera même si  $B$  n'entoure pas  $A$  (voir condensateurs plus loin). Dans ce cas, toutes les lignes de champ qui quittent  $B$  atteignent  $A$ . Sa conséquence est que si l'on connaît  $Q_A$ , on déterminera  $Q_{Bi}$  (ou l'inverse).

**2. Charge  $Q_{Be}$  sur la surface externe de  $B$  :**

Étudions ce cas en supposant que  $B$  n'est pas neutre mais possède une charge initiale  $Q_{B0}$ . Il suffit d'utiliser la conservation de la charge de  $B$  qui est isolé

$$Q_{B0} = Q_{Bi} + Q_{Be} \implies Q_{Be} = Q_{B0} - Q_{Bi} = Q_{B0} + Q_A$$

**3. Cas particulier  $Q_{B0} = 0$  :** Posons  $Q_A = Q$ , alors  $Q_{Bi} = -Q$  et  $Q_{Be} = Q$ .

### 3.3 Condensateurs

#### 3.3.1 Définition

On a vu que le phénomène de condensation augmente la capacité d'un conducteur. Pour cela, on définit un condensateur comme un ensemble de deux conducteurs en influence totale. Chaque conducteur est appelé armature et porte une charge opposée à celle de l'autre. Le condensateur sert à emmagasiner l'énergie électrique. On étudiera trois condensateurs :

- Condensateur plan : Les armatures sont planes de surface  $S$  et séparées par une distance  $e$ . L'influence est approximativement totale car  $e$  est très petite (les armatures peuvent être considérées comme des plans infinis).
- Condensateur sphérique : Les armatures sont des sphères concentriques de rayons  $R_A$  et  $R_B$ . La distance entre les armatures est  $e = R_A - R_B$ .
- Condensateur cylindrique : Les armatures sont des cylindres coaxiaux de rayons  $R_A$  et  $R_B$  et de même hauteur  $L$ . La distance  $e = R_A - R_B$  est très petite devant  $L$  ce qui justifie l'approximation de l'influence totale (cylindres de hauteur infinie).

#### 3.3.2 Capacité

Un condensateur est représenté par le schéma suivant :  $A \dashv\vdash B$

La capacité du condensateur est définie par

$$Q_A = (V_A - V_B)C \quad Q_B = (V_B - V_A)C$$

Remarques :

- Notez que pour  $Q_A$ , c'est le potentiel  $V_A$  qui porte le signe (+). De même pour  $Q_B$  et  $V_B$ . Ceci est facile à apprendre et garantit le bon signe pour les deux charges.
- La formule généralement utilisée est  $Q = VC$  mais il ne faut pas la confondre avec celle d'un seul conducteur. Dans le cas du conducteur seul,  $Q$  et  $V$  sont la charge et le potentiel de ce conducteur. Dans le cas du condensateur,  $Q$  est la charge de l'une des armatures ( $Q_A$  ou  $Q_B$ ) et  $V$  est la différence de potentiel entre les deux armatures.
- La capacité du condensateur se détermine par la même méthode que celle d'un conducteur :
  - Le théorème de Gauss entre les deux armatures donne  $\vec{E}$  en fonction de  $Q$  (ou de la densité de charge  $\sigma$ ).
  - La circulation du champ entre les deux armatures  $V_A - V_B = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$  donne  $V_A - V_B$  en fonction de  $Q$ .

Exemple condensateur plan : Gauss donne  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_0}$ . La circulation du champ donne  $\Delta V = Ee = \frac{Qe}{S\epsilon_0}$ . Donc  $C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{S}{e}$ .

- La capacités des condensateurs plan, sphérique et cylindrique sont

Plan	Sphérique	Cylindrique
$C = \epsilon \frac{S}{e}$	$C = \epsilon \frac{4\pi R_A R_B}{R_A - R_B}$	$C = \epsilon \frac{2\pi L}{\ln(R_A/R_B)}$

où  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  est la permittivité du diélectrique placé entre les armatures.  $\epsilon_r$  est la permittivité relative (pour le vide  $\epsilon_r = 1$  et  $\epsilon = \epsilon_0$ , pour l'air  $\epsilon_r \simeq 1$  et  $\epsilon \simeq \epsilon_0$ , pour les diélectriques  $\epsilon_r > 1$  et  $\epsilon > \epsilon_0$ ).

- Pour le condensateur plan, on retient facilement l'expression de la capacité par un raisonnement physique. Pour augmenter l'influence et donc  $C$ , on doit augmenter les surfaces  $S$  des armatures et diminuer leur distance de séparation  $e$ . Aussi, la présence d'un diélectrique de permittivité  $\epsilon > \epsilon_0$  entre les armatures augmente l'influence.
- On en déduit la capacité du condensateur sphérique en écrivant  $e = R_A - R_B$  et  $S = 4\pi R_A R_B$ . (Remarque si  $R_A \simeq R_B$ , alors  $S \simeq S_A \simeq S_B$ ).
- Pour le condensateur cylindrique ( $R_A \simeq R_B$ ), on remplace  $e \rightarrow \ln(R_A/R_B) \simeq \frac{R_A - R_B}{R_B}$  et  $S \rightarrow 2\pi L \simeq S_B/R_B$ .

### 3.3.3 Associations de condensateurs

Associons  $N$  condensateurs, de capacités  $C_i$ , de charges  $Q_i$  et de d.d.p.  $V_i$ , en parallèle ou en série. On peut les remplacer par un seul condensateur de capacité équivalente  $C_{eq}$ , de charge  $Q_{eq}$  et de d.d.p.  $V_{eq}$ .

Parallèle :  $V_{eq} = V_i$  et  $Q_{eq} = \sum_i Q_i = \sum_i C_i V_i = (\sum_i C_i) V_{eq}$

Série :  $Q_{eq} = Q_i$  et  $V_{eq} = \sum_i V_i = \sum_i \frac{Q_i}{C_i} = \left( \sum_i \frac{1}{C_i} \right) Q_{eq}$

Disposition	$C_{eq}$	Exemple $N = 2$	Condensateurs identiques $C_i = C$
Parallèle	$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$	$C_{eq} = C_1 + C_2$	$C_{eq} = NC$
Série	$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$	$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$	$C_{eq} = \frac{C}{N}$

### 3.4 Énergie et forces

#### 3.4.1 Énergie

Considérons un système de  $N$  conducteurs ayant chacun une charge  $Q_i$  et un potentiel  $V_i$ . L'énergie potentielle (interne) de ce système est

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i$$

L'énergie d'un condensateur de charge  $Q = -Q_A = Q_B$  est

$$U = \frac{1}{2}(Q_A V_A + Q_B V_B) = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Cette formule est valable dans le cas général où la charge initiale de  $A$  n'est pas nulle  $Q_{0A} \neq 0$ . On la détermine en définissant l'énergie du condensateur comme celle que l'on récupère lorsque l'on isole ses armatures du générateur puis on les court-circuite.

**Remarque hors programme du cours :**

Pour un système de  $N$  conducteurs :  $Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \dots + C_{1N}V_N$ . La constante  $C_{11}$  est positive et s'appelle capacité du conducteur 1 en présence des autres. La constante  $C_{12}$  est négative (et symétrique  $C_{12} = C_{21}$ ) et s'appelle coefficient d'influence du conducteur 2 sur le conducteur 1.

Pour une influence totale  $N = 2$  où  $A$  entoure  $B$  (condensateur avec  $Q_{A0} \neq 0$ ), on aura  $Q_{A0} = C_{AA}V_A + C_{AB}V_B$  et  $Q_B = Q = C_{BA}V_A + C_{BB}V_B = -Q_{Ai}$ . La capacité du condensateur est  $C = C_{BB}$  (armature entourée), par conséquent  $C_{BB} = -C_{BA} = -C_{AB} \implies Q_B = C(V_B - V_A) = -Q_{Ai}$ . Alors, la charge extérieure de  $A$   $Q_{Ae} = Q_{A0} - Q_{Ai} = (C_{AA} - C)V_B$  ne dépend que de  $V_B$  et de la forme de la surface extérieure de  $A$ . Elle est indépendante de  $V_A$  et de la forme de la surface  $B$  et de la surface interne de  $A$ . Cet exemple ne fait pas partie du programme mais il a été cité pour bien voir la différence entre la capacité propre d'un conducteur (seul) et celle d'un condensateur.

#### 3.4.2 Force électrostatique

La variation de l'énergie totale  $dE_T = dU + dE_c$  et le théorème de l'énergie cinétique  $dE_c = dW$  impliquent que

$$dE_T = dU + dW \tag{3.1}$$

Supposons qu'un seul conducteur  $i$  se déplace de  $\vec{dl}_i = dx_i \vec{i} + dy_i \vec{j}$  sous l'effet de la résultante  $\vec{F}_i = F_{ix} \vec{i} + F_{iy} \vec{j}$  des forces électrostatiques. Alors

$$dW = F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i$$

a) Système isolé avec  $Q_i = C^{te}$ ,  $\forall i$  :

Dans ce cas  $dE_T = 0$  et  $dU = -dW = -F_{ix}dx_i - F_{iy}dy_i$ . On en déduit

$$F_{ix} = - \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_Q, \quad F_{iy} = - \left( \frac{\partial U}{\partial y_i} \right)_Q$$

Exemple du condensateur plan

L'armature  $A$  reste fixe à la position  $x_A = 0$  et on déplace  $B$  selon l'axe des  $x$ . Alors,  $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$  et

$$F_B = F_{Bx} = - \left( \frac{\partial U}{\partial x_B} \right)_Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x_B}.$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{x_B}, \quad \frac{\partial C}{\partial x_B} = -\frac{C}{x_B}, \quad \text{Donc } F_B = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}.$$

b) Système lié à un générateur ( $V_i = C^{te}$ ,  $\forall i$ ) :

Dans ce cas, chaque conducteur reçoit la charge  $dQ_i$ . L'énergie potentielle de cette dernière varie de  $dE_p = V_i dQ_i$ .

Alors,  $dE_T = \sum_i dQ_i V_i$  est l'énergie fournie par le générateur. Or  $dU = \frac{1}{2} \sum_i dQ_i V_i$  de sorte que  $dE_T = 2dU$  et l'équation (3.1) devient  $dU = dW = F_{ix}dx_i + F_{iy}dy_i$ . On en déduit

$$F_{ix} = \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_V, \quad F_{iy} = - \left( \frac{\partial U}{\partial y_i} \right)_V$$

Exemple du condensateur

L'armature  $A$  reste fixe à la position  $x_A = 0$  et on déplace  $B$  selon l'axe des  $x$ . Alors,  $U = \frac{1}{2} CV^2$  et

$$F_{Bx} = \left( \frac{\partial U}{\partial x_B} \right)_V = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x_B} = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S V^2}{x_B^2}.$$

# Chapitre 4

## Conduction électrique

### 4.1 Courants électriques

#### 4.1.1 Courant

Un courant électrique est un mouvement de charges d'un point  $A$  vers un point  $B$  d'un même conducteur. C'est un déséquilibre dû à une différence de potentiel (d.d.p) entre ces deux points  $V_A \neq V_B$ . Dans les métaux, les porteurs de charge sont les électrons de charge  $q = -e$ . Dans les solutions, les porteurs de charge sont les ions (anions et cations). Dans les semi-conducteurs, les porteurs de charge positive peuvent être des électrons ou des trous (un trou correspond à l'absence d'un électron). Dans les trois cas, le mouvement des porteurs de charge négative est équivalent à celui des porteurs de charge positive, mais en sens inverse.

Un générateur est un appareil qui maintient le déséquilibre et assure un courant permanent au moyen d'une d.d.p permanente. Le potentiel de sa borne « positive » est supérieur à celui de la borne « négative ». Ceci ne veut pas dire que la borne « positive » a réellement un potentiel positif et que la borne « négative » a un potentiel négatif.

Le sens conventionnel du courant est celui du mouvement des charges positives (opposé à celui des électrons). Le courant électrique circule du pôle positif vers le pôle négatif à l'extérieur du générateur et du pôle négatif au pôle positif à l'intérieur du générateur.

L'intensité du courant est la charge qui traverse une section  $S$  du conducteur par unité de temps :

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

( $dQ$  traverse  $S$  pendant  $dt$ ). Unité Ampère ( $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$ ). Le courant est continu si son intensité est constante au cours du temps.

Une ligne de courant est la trajectoire orientée décrite par une charge positive en mouvement. Un tube de courant est constitué par l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé.

### 4.1.2 Vecteur densité de courant

Dans un conducteur métallique, la densité des porteurs de charge est  $n > 0$ , la charge d'un seul porteur de charge est  $q = \pm e$  et sa vitesse est  $\vec{v}_{\pm e} = \pm \vec{v}$  où  $\vec{v}$  a le même sens que celui du courant. La densité de charges  $\rho_c$  et le vecteur densité de courant sont (en valeurs algébriques)

$$\rho_c = nq, \quad \vec{j} = nq\vec{v}_q = ne\vec{v}$$

Exemples et unités pour le cuivre  $n = 8.38 \times 10^{+28} \text{ e}^-/\text{m}^3$ ,  $\rho_c = -1.34 \times 10^{+10} \text{ C}/\text{m}^3$ ,  $v_{-e} = -v = -3.73 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ , on trouve alors  $j = 5 \times 10^6 \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}$ . Les porteurs de charges positives et négatives ont des vitesses et charges opposées de sorte que, dans les deux cas, le vecteur  $\vec{j}$  a toujours le même sens que celui du courant ( $\vec{j} = ne\vec{v}$ ). Pour chaque section  $S$  du conducteur, on a

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

**Remarques :**

- Le courant est le flux du vecteur densité de courant à travers la surface  $S$  qui peut être ouverte ou fermée. Pour que  $I$  soit positif, le vecteur  $d\vec{S}$  est choisi dans le même sens que  $\vec{j}$  s'ils sont parallèles. Sinon, on le choisit telle que l'angle entre  $\vec{j}$  et  $d\vec{S}$  soit aigu (inférieur à  $\pi/2$ ).
- Dans tout le cours, on ne considéra que le cas où  $\vec{j}$  est parallèle à  $d\vec{S}$  et  $\|\vec{j}\|$  est constant sur  $S$  alors

$$I = \|\vec{j}\| S \implies \|\vec{j}\| = \frac{I}{S}$$

## 4.2 Mouvement des porteurs de charge

### 4.2.1 Mouvement dans le vide

La charge algébrique  $q = \pm e$  est accélérée ou retardée par une d.d.p.  $V_A - V_B$  entre deux points  $A$  et  $B$  du vide où le champ électrique est uniforme (exemple dans un tube à vide).

Relation Fondamentale :  $\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$  avec  $E = -\frac{V_A - V_B}{x_A - x_B}$ . Donc

$$a = -\frac{q}{m} \frac{V_A - V_B}{x_A - x_B} = \text{Const}$$

Le mouvement est rectiligne et uniformément varié (accéléré s'il s'agit d'un électron qui se déplace vers le plus grand potentiel).

Énergie :  $\vec{F} = q\vec{E}$  dérive d'un potentielle. Donc  $E_T(A) = E_T(B)$ , soit

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B$$

Cette équation permet de déterminer  $v_A$  si l'on connaît  $v_B$  (ou l'inverse)

$$v_A^2 = v_B^2 + 2\frac{q}{m}(V_B - V_A)$$

### 4.2.2 Mouvement dans un conducteur

Avant l'application d'une d.d.p. les porteurs de charge ont un mouvement désordonné dû à l'agitation thermique. Leur vitesse moyenne  $v$  est nulle.

A  $t = 0$  s, une d.d.p.  $V_A - V_B$  est appliquée entre deux sections  $S_A$  et  $S_B$  d'un conducteur. En plus de la force électrique  $\vec{F} = q\vec{E}$ , les porteurs de charge sont soumis à une force de frottement  $\vec{f} = -k\vec{v}$  représentant le ralentissement des porteurs de charge par le réseau d'atomes (ou d'ions) du conducteur. La vitesse moyenne des porteurs de charge obéit à l'équation différentielle

$$\vec{F} + \vec{f} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \implies \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{q}{m} E, \quad \tau = \frac{m}{k}$$

La solution (correspondant à  $v(0) = 0$  m/s) est

$$v(t) = v_l(1 - e^{-t/\tau}), \quad v_l = \frac{q}{k} E$$

Le mouvement des porteurs de charge passe donc par deux régimes :

Agitation thermique	Régime transitoire très court	Régime permanent
$t \leq 0, E = 0$ V/m	Mouvement accéléré $t < \tau$	Mouvement uniforme $t > \tau$
$v = 0$ m/s	$v \nearrow$	$v = v_l$

Pour  $t = \tau$ , le régime permanent est supposé atteint lorsque  $v = 0.63v_l$ . Si le régime permanent est supposé atteint quand  $v(t) = 0,99v_l$ , alors  $(1 - e^{-t/\tau}) = 0,99$  et  $t = -\tau \ln(1 - 0,99) = 4,6\tau \simeq 5\tau$ . Le régime permanent est très rapidement atteint.

Dorénavant, on ne considèrera que le régime permanent pour lequel la vitesse des porteurs de charge est constante

$$v = v_l = \frac{q}{k} E$$

La loi générale est

$$\vec{v} = \mu \vec{E}$$

où le coefficient  $\mu$  est appelé mobilité des porteurs de charge. Unité  $\text{m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ . Dans ce modèle,  $\mu = \frac{q}{k}$ . Cette vitesse moyenne de dérive des porteurs de charge est assez petite mais tous les porteurs de charges l'atteignent en même temps car le champ électrique s'établit instantanément dans tout le conducteur. Pour cette raison, on a l'impression que le courant s'établit instantanément.

## 4.3 Loi d'Ohm

### 4.3.1 Loi macroscopique et loi locale

**Loi macroscopique** : A température constante, la d.d.p. entre deux points d'un conducteur est proportionnelle à l'intensité du courant qui le traverse

$$V_A - V_B = RI, \quad V_A > V_B, \quad I > 0$$

$R$  est appelée résistance et son unité est l'ohm ( $1\Omega = 1\text{V/A}$ ). La conductance est l'inverse de la résistance ( $\frac{1}{R}$  en  $\Omega^{-1}$ ). Les conducteurs pour lesquels la loi d'Ohm est applicable (avec  $R$  constante) sont appelés conducteurs ohmiques ou résistors (exemple : métaux et alliages métalliques). Pour les conducteurs non ohmiques,  $R$  varie avec la température (et donc  $I$ ) et n'est pas une caractéristique du conducteur (exemple : lampe à incandescence « en tungstène »).

**Forme locale de la loi d'Ohm :** Localement (c'est-à-dire, en chaque point du conducteur), la densité de courant est proportionnelle au champ électrique qui l'engendre

$$\vec{j} = nq\vec{v} = nq\mu\vec{E}$$

La loi d'Ohm s'écrit alors

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \sigma\vec{E} \\ \sigma &= nq\mu \simeq \frac{nq^2}{k} \end{aligned}$$

$\sigma$  est appelée conductivité électrique (unité  $\Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ ). Son inverse  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  est la résistivité (unité  $\Omega\cdot\text{m}$ ).

Cette formule permet de déterminer  $R$  en fonction de  $\sigma$  (supposée constante : conducteur homogène) et des dimensions du conducteur. En effet, si  $\vec{u}_I$  est le vecteur unitaire dans la direction de  $I$  et  $\vec{j}$ , alors

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{\sigma}\vec{j} = \frac{I}{\sigma S}\vec{u}_I \implies V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{I}{\sigma} \int_A^B \frac{\vec{u}_I\cdot d\vec{l}}{S} \\ R &= -\frac{1}{\sigma} \int_A^B \frac{\vec{u}_I\cdot d\vec{l}}{S} \end{aligned}$$

Exemples de conducteurs où  $V_B > V_A$  :

Cylindrique de longueur $L$ et de section $S$	Cylindrique creux de longueur $L$ et de rayons $R_B > R_A$
$S$ section constante, $\vec{u}_I = -\vec{i}$ , $d\vec{l} = dx\vec{i}$	$S = 2\pi rL$ , $\vec{u}_I = -\vec{u}_r$ , $d\vec{l} = dr\vec{u}_r$
$R = \frac{1}{\sigma} \frac{x_B - x_A}{S} = \rho \frac{L}{S}$	$R = \frac{1}{\sigma} \int_{R_A}^{R_B} \frac{dr}{2\pi rL} = \rho \frac{\ln(R_B/R_A)}{2\pi L}$

**Remarques :**

– Un conducteur est caractérisé par les valeurs de  $m$ ,  $q$ ,  $n$  et  $k$ . A partir de ces valeurs, on a déterminé les grandeurs

$$\tau = \frac{m}{k}, \quad \mu = \frac{q}{k}$$

La relation  $\vec{j} = nq\vec{v} = nq\mu\vec{E} = \sigma\vec{E}$  donne l'expression de la conductivité ainsi que son lien avec la mobilité

$$\sigma = qn\mu = \frac{q^2n}{k}$$

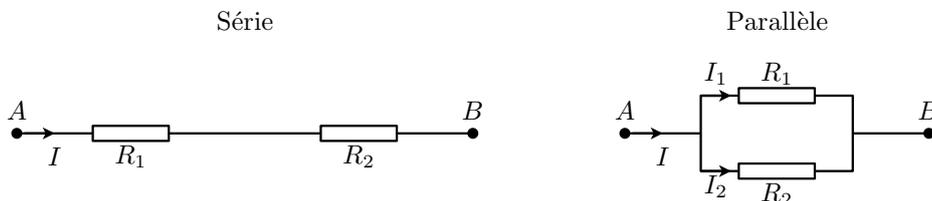
- La résistivité dépend de la température  $T$ . Dans le cas le plus simple, cette dépendance est caractérisée par une constante  $\alpha$

$$\rho(T) = \rho_0 + \alpha\Delta T, \quad \Delta T = T - T_0, \quad \rho_0 = \rho(T_0)$$

- Le courant chauffe le conducteur (voir effet Joule). Donc, la résistance  $R$  peut dépendre de l'intensité. La courbe caractéristique ( $V_A - V_B$  en fonction de  $I$ ) permet de déterminer  $R$  pour chaque  $I$ . Si cette courbe est une droite,  $R$  est une constante qui ne dépend pas de  $I$ . Dans ce cas,  $R$  est la pente de cette droite et caractérise un conducteur ohmique.

### 4.3.2 Association de résistances

Associons  $N$  résistances  $R_i$  en série ou en parallèle. On peut les remplacer par une seule résistance équivalente  $R_{eq}$ . Commençons par deux résistances :



Série :  $V_A - V_B = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I = R_{eq} I$

Parallèle :  $I = I_1 + I_2 = \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} = (V_A - V_B) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V_A - V_B}{R_{eq}}$

Dans le cas général, on a :

Disposition	$R_{eq}$	Exemple $N = 2$	Résistances identiques $R_i = R$
Série	$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$	$R_{eq} = R_1 + R_2$	$R_{eq} = NR$
Parallèle	$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$	$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	$R_{eq} = \frac{R}{N}$

## 4.4 Effet Joule

Une charge positive  $Q$  circule dans le même sens que celui du courant. Par conséquent, elle passe d'un potentiel  $V_A$  vers un potentiel plus bas  $V_B$ , et son énergie potentielle diminue car  $\Delta E_p = Q(V_B - V_A) < 0$ . Cette énergie perdue est égale à l'opposé du travail de la force électrostatique appliquée à  $Q$

$$W_A^B = -\Delta E_p = Q(V_A - V_B)$$

Dans le vide, elle se transforme en énergie cinétique mais elle ne peut pas le faire dans un conducteur car  $v = v_l$  est constante. Elle se retrouve alors sous forme de chaleur. Ce phénomène est appelé effet Joule.

Quand un courant  $i(t)$  traverse un conducteur entre un point  $A$  et un point  $B$ , l'énergie dissipée sous forme de chaleur correspond au passage de la charge  $dq$  de  $A$  à  $B$  pendant  $dt$

$$dW = (V_A - V_B)dq = (V_A - V_B)idt$$

La puissance correspondante est

$$P = \frac{dW}{dt} = (V_A - V_B)i$$

C'est la loi de Joule qui pour un conducteur ohmique ( $V_A - V_B = Ri$ ), s'écrit

$$P = Ri^2$$

**Remarques :**

– L'énergie dissipée entre  $t_1$  et  $t_2$  par un conducteur ohmique traversé par un courant  $i(t)$  variable est

$$W = R \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt$$

– La densité de puissance (puissance/volume) d'un conducteur cylindrique homogène de volume  $LS$  et de résistance  $R = \rho \frac{L}{S}$  traversé par un courant  $I = jS$  est

$$\pi = \frac{P}{LS} = \frac{RI^2}{LS} \implies \pi = \frac{j^2}{\sigma}$$

Dans le cas général, en utilisant  $\frac{1}{\sigma}\vec{j} = \vec{E}$ , cette formule devient

$$\pi = \vec{j} \cdot \vec{E}$$