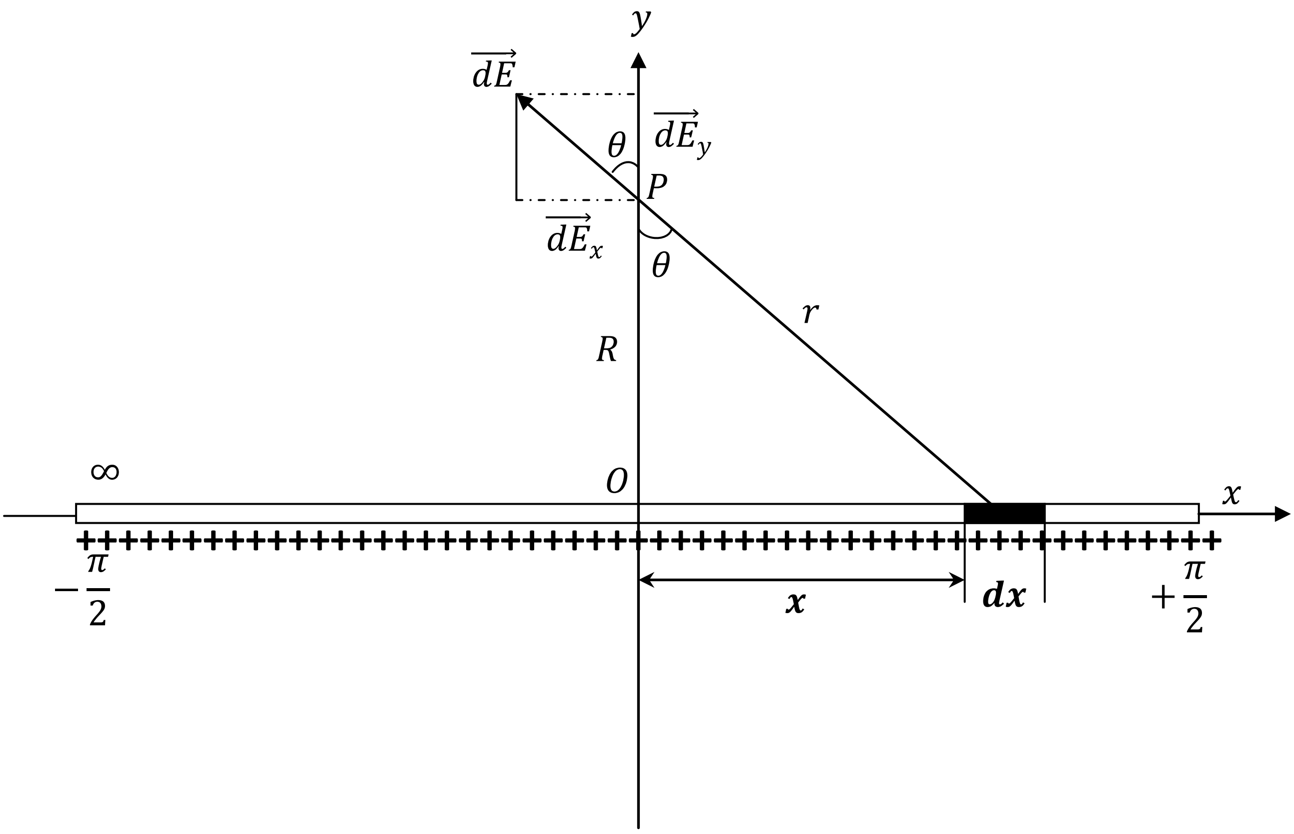
Fiche TD N° : Correction

Exercice N°1 : Solution

Champ électrique crée en un point quelconque de l'espace par une droite infinie chargée avec une densité linéique λ>0 uniforme. (Voir le cours)

Chaque élément peut être considéré comme une charge ponctuelle de grandeur : $\lambda\, x$, crée un champ électrostatique élémentaire $\overrightarrow{dE}$ au point P donnée par :



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{r^2} \qquad (1)$$

Le champ peut être décomposé le long des axes ox et oy :

$$\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE_x} + \overrightarrow{dE_y} \qquad (2)$$

Sachant que :

$$E_x = \int dE_x = \int dE\, sin\theta \qquad (3)$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE\, cos\theta \qquad (4)$$

D'où :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2}\, sin\theta \qquad (5)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2} cos\theta \qquad (6)$$

Remarquant que x, θ et r sont variables et R étant constant on déduire :

$$x = R\, \mathrm{tg}\theta \ \Rightarrow dx = R\, d\theta\, \frac{1}{cos^2\theta} \qquad (7)$$

Et : $r = \frac{R}{cos\theta}$, Par la suite on obtient :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2}\, sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{(R/cos^2\theta)}{(R^2/cos^2\theta)} \sin\theta\, d\theta \qquad (8)$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{R}\, sin\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{1}{R}\, [-cos\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \qquad (9)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{E_x} = \vec{0}$, En raison de la symétrie le champ électrique selon ox est nul.

De la même façon toutes les composantes dE_y peuvent s'ajouter, par intégration :

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2} cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{(R/cos^2\theta)}{(R^2/cos^2\theta)} \cos\theta\, d\theta \qquad (10)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{R}\, cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{1}{R}\, [sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \qquad (11)$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\, \frac{\lambda}{R} \qquad (12)$$

Finalement le champ total s'écrit :

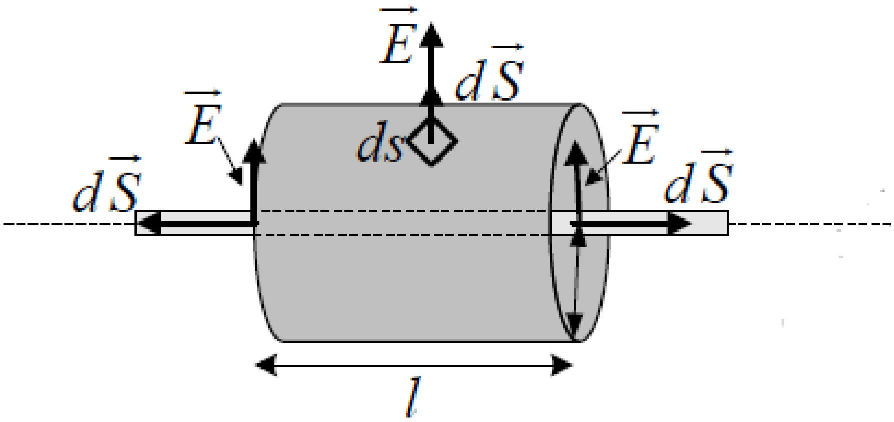
$$\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE}_x + \overrightarrow{dE}_y \quad \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_y = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\, \frac{\lambda}{R}\, \vec{j} \qquad (13)$$

<u>Exercice N°2 :</u> Solution

1. ***Champ électrique crée en un point quelconque de l'espace par une droite infinie chargée avec une densité linéique λ>0 uniforme. (Exercice 1)***

La surface de Gauss qui convient à ce cas est celle d'un cylindre de longueur l, et dont l'axe coïncide avec la tige. Il y a trois surfaces : la surface de base S_1, la surface de base S_2 , et la surface latérale S_l :

Le flux à travers toutes les surfaces qui constituent le cylindre de Gauss est la somme des flux à travers chaque surface, soit $\emptyset = \sum \emptyset_i$ (1) :



$$\emptyset = \oint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \underbrace{\oint_{S_1} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}}_{=0} + \underbrace{\oint_{S_2} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}}_{=0} + \oint_{S_l} \vec{E}\,\overrightarrow{dS} \qquad (2)$$

Sur les surfaces des bases (S_1) et (S_2) , le champ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{dS}$ donc il n'y a aucun flux qui traverse ces deux surfaces $(cos\frac{\pi}{2} = 0)$. Mais, par contre sur la surface latérale (S_l) , les vecteurs $\overrightarrow{dS}$ sont tous radiaux comme $\vec{E}$ $(cos0 = 1)$. D'où l'on obtient :

$$\emptyset = \oint_{S_l} \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = E\,S_l = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

Sachant que $Q_i = \lambda\, l\ et\ S_l = 2\pi R l$, donc :

$$E\,2\pi\,R\,l = \frac{\lambda\,l}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \qquad (4)$$

2. *Champ électrostatique crée en un point quelconque de l'espace par un plan infini chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$ uniforme.*

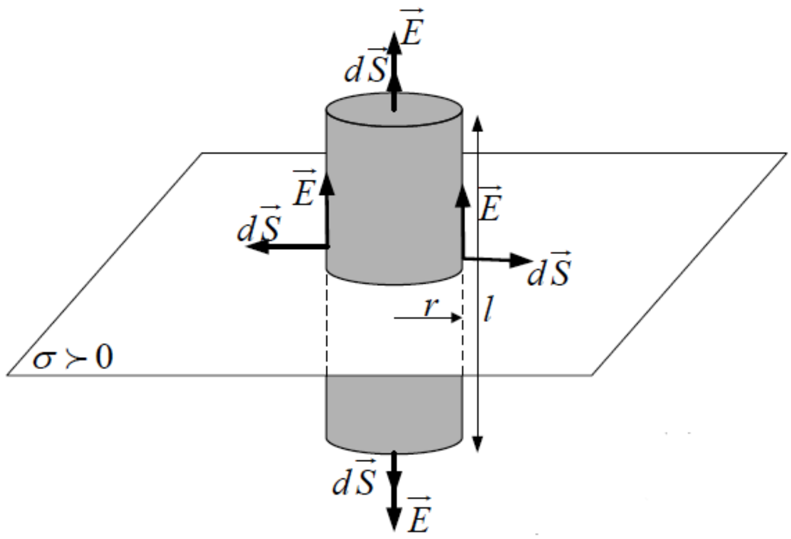
On choisit comme surface de Gauss un cylindre perpendiculaire au plan. Là aussi on a trois surfaces :

Le flux à travers la base de surface S_1 : $\emptyset_1 = E\, S_1$

Le flux à travers la base de surface S_2 : $\emptyset_2 = E\, S_2$

Le flux à travers la base latérale S_l est nul : $(\overrightarrow{dS} \perp \overrightarrow{dE})$ Faire attention à :

$E_{\,1} = -E_2$ mais : $E.S_1 \;=\; E.S_2$, donc :



$$\emptyset = 2\,E\,S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (5)$$

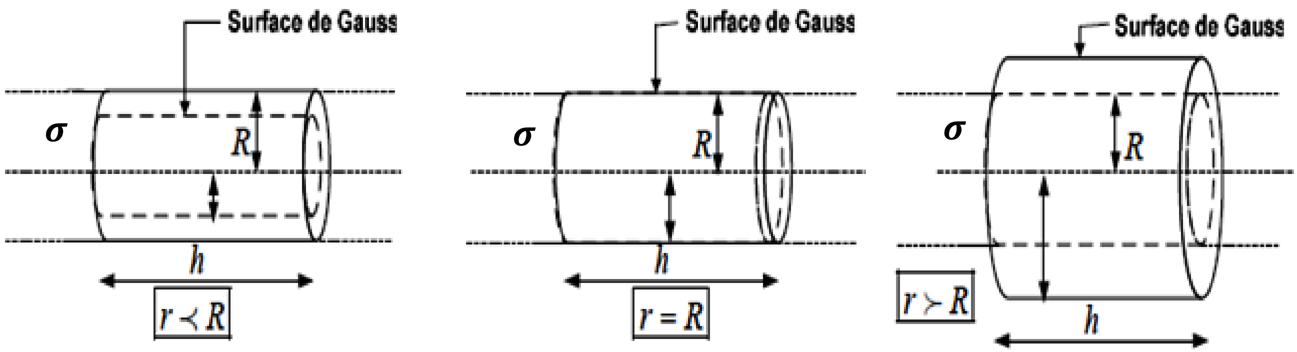
A la fin, on remarque que le champ électrique est uniforme quelque soit la distance entre le point considéré et le plan :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (6)$$

Conclusion : De ces exemples on remarque que les résultats sont parfaitement identiques à ceux déjà trouvés précédemment, mais avec beaucoup plus de facilité, et c'est là tout l'intérêt du **théorème de Gauss**. (***Voir le cours***)

TD N°3 : Le théorème de Gauss

<u>Exercice N°3 :</u> Solution



1. ***Champ électrostatique crée par un cylindre creux de longueur infini et de rayon R chargé par une densité surfacique uniforme σ.***

1. a) Le champ électrostatique à l'intérieur du cylindre : La surface de Gauss convenable à ce cas est un cylindre de hauteur h, de rayon $r < R$ et qui renferme la charge : $Q_{int} = 0$ (Pas de charge à l'intérieur du cylindre). D'après le théorème de Gauss :

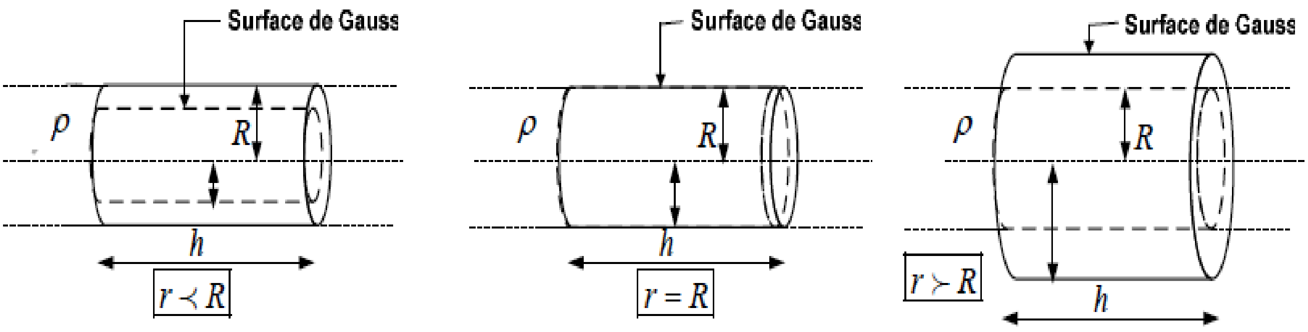
$$\emptyset = E_{int}\ S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{int} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0\ 2\pi\ rh} = 0 \qquad (1)$$

1. b) Le champ électrostatique à l'extérieur du cylindre : La surface de Gauss convenable à ce cas est un cylindre de hauteur h, de rayon $r > R$ et qui renferme la charge $Q_{int} = \sigma\ 2\pi\ R\ h$. D'après le théorème de Gauss :

$$\emptyset = E_{ext}\ S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{ext} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma\ 2\pi\ R\ h}{\varepsilon_0 2\pi\ rh} \qquad (2)$$

$$E_{ext} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ \frac{1}{r} \qquad (3)$$

2. Champ électrostatique crée par un cylindre plein de longueur infini et de rayon R chargé par une densité volumique uniforme ρ.



2. a) Le champ électrostatique à l'intérieur du cylindre : La surface de Gauss convenable à ce cas est un cylindre de hauteur h, de rayon $r < R$ et qui renferme la charge : $Q_{int} = \rho\, V = \rho\, \pi\, r^2\, h$.

D'après le théorème de Gauss :

$$\emptyset = E_{int}\, S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{int} = \frac{\rho\, \pi\, r^2\, h}{\varepsilon_0\, 2\pi\, rh} \qquad (4)$$

$$E_{int} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\, r \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{int} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\, r\, \vec{u}_r \qquad (5)$$

2. b) Le champ électrostatique à l'extérieur du cylindre : La surface de Gauss convenable à ce cas est un cylindre de hauteur h, de rayon $r > R$ et qui renferme la charge $Q_{int} = \rho\, \pi\, R^2\, h$. D'après le théorème de Gauss :

$$\emptyset = E_{ext}\, S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{ext} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma\, 2\pi\, R^2\, h}{\varepsilon_0 2\pi\, r^2 h} \qquad (6)$$

$$E_{ext} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\, \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \vec{E}_{ext} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\, \frac{1}{r^2}\, \vec{u}_r \qquad (7)$$

2. c) Le champ électrostatique à surface du cylindre : La surface de Gauss convenable à ce cas est un cylindre de hauteur h, de rayon $r = R$ et qui renferme la charge $Q_{int} = \rho\, \pi\, R^2\, h = \rho\, \pi\, r^2\, h$.

D'après le théorème de Gauss :

$$\emptyset = E_{Sur}\ S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{sur} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 S} = \frac{\rho\,\pi\, r^2\, h}{\varepsilon_0 2\pi\, r^2 h} \qquad (8)$$

$$E_{sur} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{sur} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\,\vec{u}_r \qquad (9)$$

3. Le potentiel électrostatique :

Pour en déduire le potentiel électrique, on fait appel à la formule :
$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$, Puisque le champ est radial, on peut écrire :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E\,dr \qquad (10)$$

Pour obtenir les expressions de V_i et V_e, on doit intégrer :

$$V_i = -\int \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\ rdr \Rightarrow V_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}\,r^2 + C_1 \qquad (11)$$

$$V_e = -\int \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\,\frac{R^2}{r}dr \Rightarrow V_e = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\,R^2\,ln(r) + C_2 \qquad (12)$$

On obtient les constantes d'intégration en se référant à la condition de l'annulation du potentiel en $r = 0$ et sa continuité en $r = R$.

3. a) Potentiel à l'intérieur du cylindre :

$$\left.\begin{array}{r} V_i = -\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}\,r^2 + C_1 \\ r = 0,\ V = 0\ et\ C_1 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow V_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}\,r^2 \qquad (13)$$

3. b) Potentiel à la surface du cylindre :

si on remplace par R dans l'expression de V_i, on obtient le potentiel à la surface du cylindre :

$$\left.\begin{array}{r} V_i = -\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}\,r^2 \\ r = R \end{array}\right| \Rightarrow V_s = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}\,R^2 \qquad (14)$$

4. c) Potentiel à l'extérieur du cylindre :

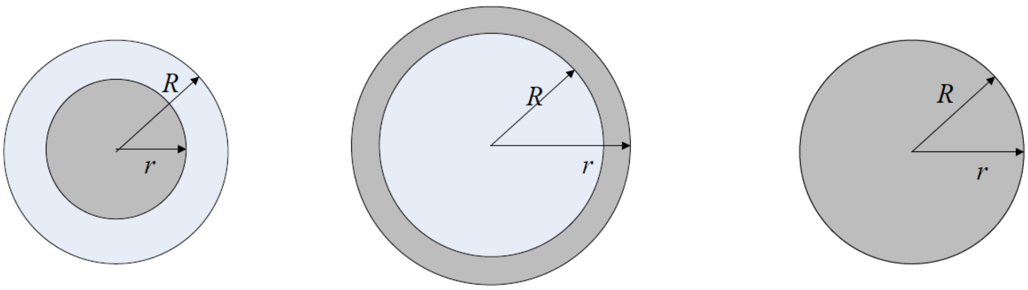
$$V_e = -\int \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\,\frac{R^2}{r}dr \Rightarrow V_e = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\,R^2\,ln(r) + C_2 \qquad (15)$$

$$\left.\begin{array}{r} V_e = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \, ln(r) + C_2 \\ r = R, \; V = -\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2 \end{array}\right| \Rightarrow C_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \, ln(r) - \frac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2 \quad (16)$$

$$V_e = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \, ln\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2 \quad (17)$$

Exercice N°4 : Solution

1. ***Champ électrostatique crée par une sphère creuse chargée avec une densité surfacique uniforme σ .***



(a) (b) (c)

La surface de Gauss qui convient ici est une sphère de rayon r . En appliquant le théorème de Gauss on écrit :

$$\emptyset = \oint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} \Rightarrow \emptyset = \oint_S E\,dS \Rightarrow E\,S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

1. a) A l'intérieur de la sphère chargée : $0 \le r \le R$ (Figure. a)

Dans ce cas toutes les charges électriques sont à l'extérieur de la surface, d'après le théorème de Gauss le flux de $\vec{E}$ est nul. $Q_{int} = 0$

$$E_{int}\, 4\pi\, r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{E_{int} = 0} \quad (2)$$

1. b) A l'intérieur de la sphère chargée : $R \le r \le +\infty$ (Figure. b)

Une distribution surfacique renforme la sphère de rayon R dans ce cas là la charge totale est : $Q_{int} = \sigma\, 4\pi\, R^2$ le champ électrostatique est alors :

$$E_{ext}\ 4\pi\, r^2 = \frac{\sigma\, 4\pi\, R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{ext} = \frac{\sigma\, 4\pi\, R^2}{4\pi\, r^2 \varepsilon_0} \Rightarrow E_{ext} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \qquad (3)$$

2. *Champ électrostatique crée par une sphère pleine chargée avec une densité volumique uniforme ρ .*

Discussion :

1. **$R > r$ (Figure. a)**

➢ D'après la figure (a) seule une partie de la charge portée par la sphère se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss :

$$E_{int}\ 4\pi\, r^2 = \frac{\rho\, \frac{4}{3}\pi\, r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{int} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\, r \qquad (4)$$

E est proportionnel à la distance.

2. **$R < r$ (Figure. b)**

➢ D'près la figure (b) toute la charge portée par la sphère se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss :

$$E_{ext}\ 4\pi\, r^2 = \frac{\rho\, \frac{4}{3}\pi\, R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{ext} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2} \qquad (5)$$

$$E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\, \varepsilon_0\, r^2} \qquad (6)$$

E est inversement proportionnel au carré de la distance. La sphère se comporte comme une charge ponctuelle.

3. **$R < r$ (Figure. b)**

➢ D'après la figure (c), la surface de Gauss coïncide avec la surface de la sphère :

$$E_{sur}\ 4\pi\, R^2 = \frac{\rho\, \frac{4}{3}\pi\, R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{sur} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\, R \qquad (7)$$

Le champ électrique sur la surface de la sphère est constant.