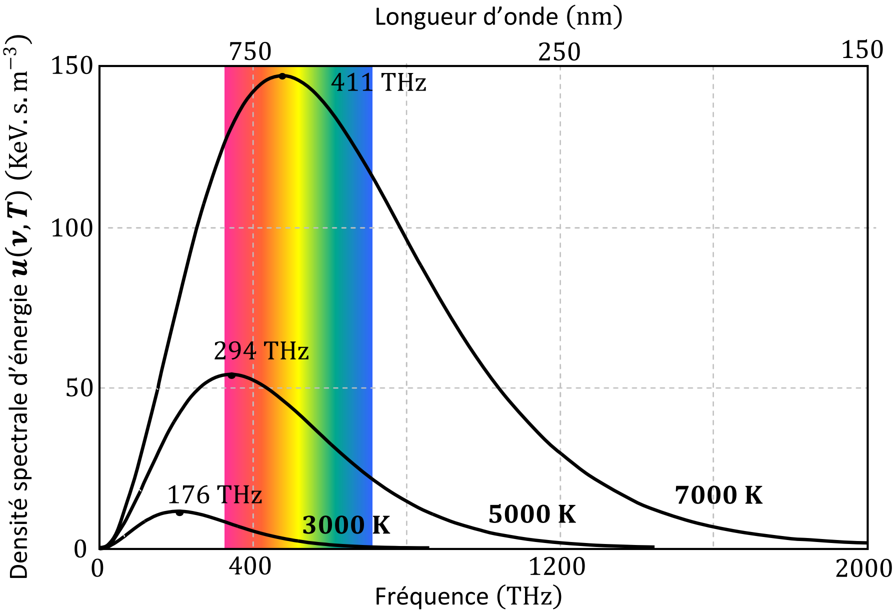
SOLUTIONS DE LA SÉRIE DE TD N° 01
LIMITES DE LA THÉORIE CLASSIQUE

EXERCICE 01 : ***Rayonnement du corps noir.***

La densité d'énergie rayonnée par un corps noir $u(\nu,T)$ en fonction de la fréquence ν et de la température T est donnée par la loi de Planck

$$u(\nu,T)=\frac{8\pi.h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}$$

1. **Représentation** de $u(\nu,T)$ en fonction de ν pour une température donnée.



2. **Position du maximum de la densité $u(\nu,T)$.**

Les extrémums de $u(\nu,T)$ sont donnés par

$$\frac{\partial u(\nu,T)}{\partial\nu}=0$$

$$\frac{8\pi.h}{c^3}\left\{\frac{3\nu^2\left(e^{h\nu/k_BT}-1\right)-\nu^3.(h/k_BT).e^{h\nu/k_BT}}{(e^{h\nu/k_BT}-1)^2}\right\}=0$$

Le numérateur étant nul

$$\nu^2\left\{\left(3-\frac{h\nu}{k_BT}\right)e^{h\nu/k_BT}-3\right\}=0$$

Ce qui donne

$\nu=0$ qui correspond au minimum du spectre (voir la figure)

Ou

$$(3-x)e^x-3=0 \qquad \text{avec} \qquad x=\frac{h\nu}{k_BT}$$

La résolution de cette équation se fait numériquement. Elle donne la position du maximum de la densité spectrale d'énergie.

En utilisant la méthode des itérations successives :

$$(3-x)e^x-3=0 \quad\Rightarrow\quad x=3.(1-e^{-x})$$

D'où l'algorithme

$$x_{n+1} = 3.(1 - e^{-x_n})$$

$x_0 = 0{,}5$	$x_1 = 3.(1 - e^{-0{,}5}) = 1{,}1804$
$x_1 = 1{,}1804$	$x_2 = 3.(1 - e^{-1{,}1804}) = 2{,}0785$
$x_2 = 2{,}0785$	$x_3 = 3.(1 - e^{-2{,}0785}) = 2{,}6246$
$x_3 = 2{,}6246$	$x_4 = 3.(1 - e^{-2{,}6246}) = 2{,}7860$
$x_4 = 2{,}7860$	$x_5 = 3.(1 - e^{-2{,}7860}) = 2{,}8143$
$x_5 = 2{,}8143$	$x_6 = 3.(1 - e^{-2{,}8143}) = 2{,}8201$
$x_6 = 2{,}8201$	$x_7 = 3.(1 - e^{-2{,}8201}) = 2{,}8212$
$x_7 = 2{,}8212$	$x_8 = 3.(1 - e^{-2{,}8212}) = 2{,}8213$
$x_8 = 2{,}8213$	$x_9 = 3.(1 - e^{-2{,}8213}) = 2{,}8214$
$x_9 = 2{,}8214$	$x_{10} = 3.(1 - e^{-2{,}8214}) = 2{,}8214$

D'où la solution

$$\boxed{\frac{h\nu_{\max}}{k_B T} = 2{,}8214}$$

Et

$$\boxed{\nu_{\max} = (5{,}8786 \times 10^{10}).T \quad (Hz)}$$

3. Position au maximum en fonction de la température.

$$\boxed{u(\nu_{\max}, T) = (6{,}8794 \times 10^{-29}).T^3 \quad (J.s.m^{-3})}$$

4. Rayonnement thermique d'un corps humain à la température de $37\ °C$.

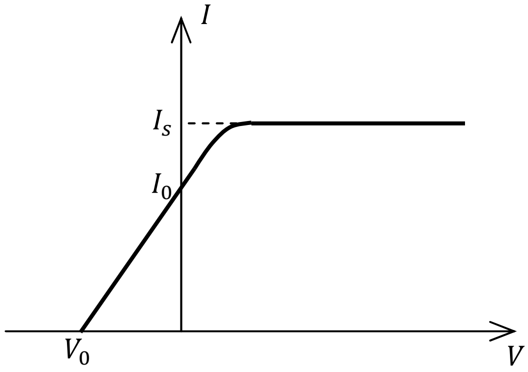
$$\nu_{\max} = 1{,}8223 \times 10^{13} \quad Hz$$

$$\boxed{\lambda_{\max} = 1{,}6462 \times 10^{-7} \quad m}$$

Cette longueur d'onde appartient au domaine du proche infrarouge.

EXERCICE 02 : ***Effet photoélectrique.***

La figure ci-contre représente la variation de l'intensité du courant I en fonction de la différence de potentiel V au bord de l'ampoule dans le montage expérimental de Lennard–Jones.



1. Valeurs caractéristiques.

I_0 : Est le *courant spontané* crée par l'effet photoélectrique pour une d.d.p nulle.

I_s : Est le *courant de saturation*, c'est-à-dire le courant maximum que nous pouvons obtenir en attirant les électrons avec une d.d.p positive.

V_0 : Est le *potentiel d'arrêt*, c'est la valeur absolue de la d.d.p (négative) nécessaire pour stopper les électrons issus de la photocathode.

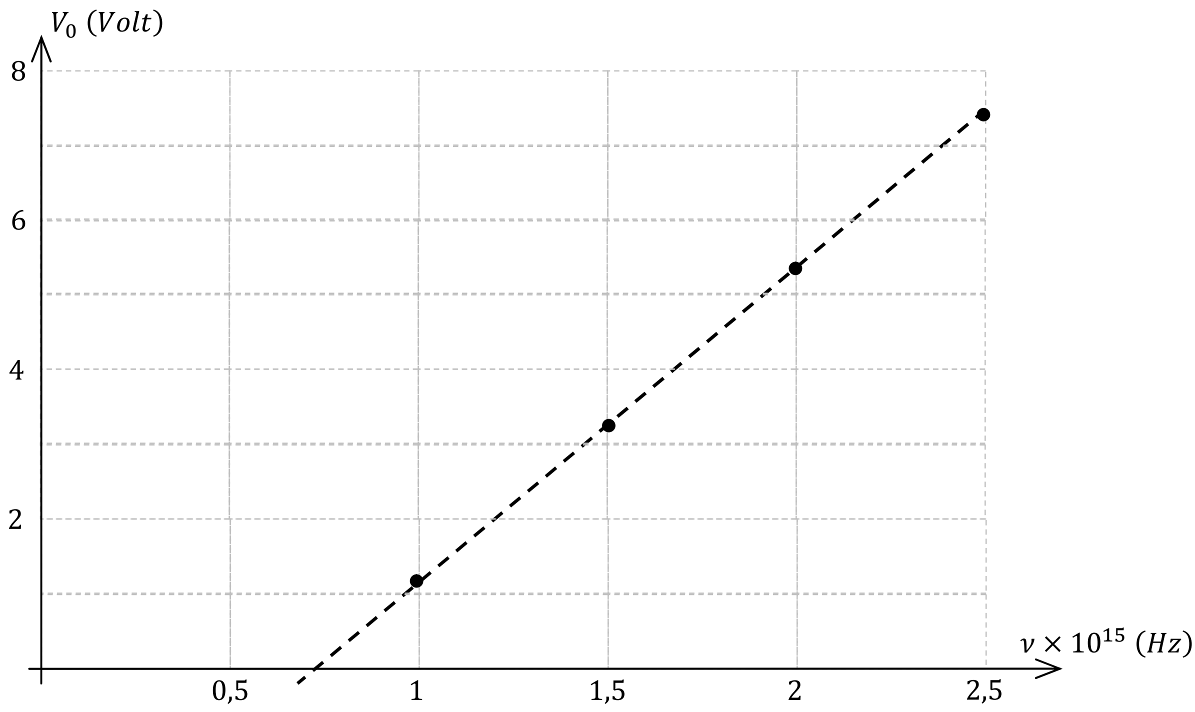
2. Conservation de l'énergie mécanique totale.

$$\frac{1}{2}mv^2 - e.V_C = 0 - e.V_A$$

Donc

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = e.(V_C - V_A) = e.V_0}$$

3. Représentation.



4. **Calcul théorique.**

$$h\nu = W_s + \frac{1}{2}mv^2 = W_s + e.V_0$$

Donc

$$\boxed{V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_s}{e}}$$

Qui représenté par une droite de pente h/e quelque soit la nature du métal.

5. **Par extrapolation de la droite.**

$$V_0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad \boxed{\nu_s = 0{,}73 \times 10^{15}\ (Hz)}$$

6. **ν_s est la fréquence seuil.**
   $\nu \geq \nu_s$: Il y a effet photoélectrique.
   $\nu < \nu_s$: Il n'y a pas d'effet photoélectrique.

7. **Dans la théorie électromagnétique classique** quelque soit la fréquence de radiation le métal peut toujours accumuler l'énergie provenant de cette onde et quand l'énergie accumulée dépasse une certaine valeur appelée travail de sortie du métal W_s un électron est éjecté vers l'extérieur.Or d'après l'expérience, si la radiation à une fréquence inférieure à la fréquence seuil $(\nu < \nu_s)$ il n'y a pas d'éjection d'électrons quelque soit la durée de l'éclairage.

EXERCICE 03 : ***Effet photoélectrique.***

Un faisceau parallèle de photons de fréquence ν est envoyé sur une photocathode.
P est la puissance transportée par ce faisceau.

1. Le nombre de photons tombant sur la photocathode pendant un temps dt.

L'énergie reçue par la photocathode durant un temps est donnée par dt

$$dE = h\nu . dN_p$$

D'où la puissance du faisceau incident

$$P = \frac{dE}{dt} = h\nu \frac{dN_p}{dt}$$

Donc

$$\boxed{dN_p = \frac{P}{h\nu} dt}$$

2. Courant photoélectrique.

Le rendement quantique étant égal à l'unité, le nombre d'électrons arraché est donc égal au nombre de photons incidents.

$$dN_e = dN_p$$

Et le courant électrique dû à ces électrons est

$$I = \frac{dQ}{dt} = e\frac{dN_e}{dt}$$

D'où

$$\boxed{I = \frac{eP}{h\nu}}$$

3. En introduisant le rendement quantique R.

$$R = \frac{dN_e}{dN_p} \qquad \Rightarrow \qquad dN_e = R.dN_p$$

Donc

$$I = \frac{dQ}{dt} = e\frac{dN_e}{dt}$$

Et

$$\boxed{I = R\frac{eP}{h\nu}}$$

4. En maintenant constantes les caractéristiques du faisceau et de la photocathode.

$$P = \text{constante} \qquad \text{et} \qquad R = \text{constante}$$

On ne peut alors que varier la fréquece ν, or pour obtenir un effet photoélectrique et donc un courant.

$$\nu \geq \nu_s$$

En inversant

$$\boxed{I \leq R\frac{eP}{h\nu_s}}$$

Explication : Pour pouvoir garder la ***puissance constante*** tout en augmentant la fréquence il faut diminuer le nombre (densité) de photons incidents. Donc, en démarrant de la fréquence seuil, plus nous augmentons la fréquence plus le nombre de photon diminue, ce qui entraine une diminution du nombre d'électrons arrachés et donc une diminution du courant.

EXERCICE 04 : ***Effet photoélectrique***.

1. Détermination de la longueur d'onde seuil.

Photocathode	Césium	Potassium	Aluminium	Cuivre	Tungstène	Nickel	Platine
$\boldsymbol{W_s}$ (eV)	1,8	2,2	3,0	4,1	4,5	5,0	5,4
$\boldsymbol{\nu_s = \frac{W_s}{h}\ (\times 10^{15}\ Hz)}$	0,4346	0,5312	0,7244	0,99	1,0866	1,2073	1,3039
$\boldsymbol{\lambda_s = \frac{c}{\nu_s}\ (\times 10^{-7}\ m)}$	6,9020	5,6471	4,1412	3,0301	2,7608	2,4847	2,3006
$\boldsymbol{T = h\nu - W_s}$ (eV) $\boldsymbol{T = 3,5496 - W_s}$ (eV)	1,7496	1,3496	0,5496	$*$	$*$	$*$	$*$

$*$: Il n'y a pas d'effet photoélectrique.

2. On éclaire la photocathode avec une radiation $\lambda = 3500$ Å.

$$\boxed{E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}} \qquad \text{donc} \qquad E = 3{,}5496 \text{ eV}$$

Si

$h\nu > W_s$ ou $\nu > \nu_s$ il y a effet photoélectrique.

$h\nu < W_s$ ou $\nu < \nu_s$ il n'y a pas d'effet photoélectrique.

En utilisant les longueurs d'ondes, si

$\lambda < \lambda_s$ il y a effet photoélectrique.

$\lambda > \lambda_s$ il n'y a pas d'effet photoélectrique.

Dans le cas ou nous avons un effet photoélectrique, l'énergie cinétique des électrons sortant est égale à

$$\boxed{T = h\nu - W_s}$$

EXERCICE 05 : ***Effet Compton.***

Un faisceau de rayons X de longueur d'onde λ_0 tombe sur une cible en graphite. Les rayons diffusés font un angle θ par rapport au faisceau incident. On donne : $\lambda_0 = 0{,}095$ Å et $\theta = 37°30'$.

1. Longueur d'onde des rayons diffusés.

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

Ou

$$\boxed{\lambda' = \lambda_0 + \lambda_c(1 - \cos\theta)} \qquad \text{numériquement} \qquad \boxed{\lambda' = 0{,}1000 \text{ Å}}$$

Avec la longueur d'onde de Compton

$$\lambda_c = 2{,}426\,310 \times 10^{-12}\ m$$

2. Caractéristiques des photons incidents et diffusés.

	Photon incident	Photon diffusé
Fréquence (Hz)	$\nu = c/\lambda_0 = 3{,}1556 \times 10^{19}$	$\nu' = c/\lambda' = 2{,}9979 \times 10^{19}$
Energie ($joules$)	$E = h\nu = 2{,}0909 \times 10^{-14}$	$E' = h\nu' = 1{,}9864 \times 10^{-14}$
Energie (MeV)	$E = h\nu = 1{,}3051$	$E' = h\nu' = 1{,}2399$
Quantité de mouvement ($kg.m.s^{-1}$)	$p = \dfrac{h\nu}{c} = 6{,}9745 \times 10^{-23}$	$p' = \dfrac{h\nu'}{c} = 6{,}6259 \times 10^{-23}$

3. Caractéristiques de l'électron de recul. : énergie, impulsion, vitesse et angle d'éjection.

L'énergie de l'électron de recul

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2$$

D'où

$$\boxed{mc^2 = m_0c^2 + h\nu - h\nu'}$$

Numériquement : $m_0c^2 = 0{,}511\ MeV$

$$\boxed{mc^2 = 0{,}5762\ MeV} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{mc^2 = 9{,}2307 \times 10^{-14}\ Joules}$$

La masse de l'électron en mouvement

$$m = 1{,}0270 \times 10^{-30}\ kg$$

L'impulsion (quantité de mouvement) de l'électron de recul

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2$$

D'où

$$\boxed{p_{\text{élec}}^2c^2 = m^2c^4 - m_0^2c^4} \qquad \text{Numériquement :} \qquad \boxed{p_{\text{élec}} = 1{,}4227 \times 10^{-22}\ kg.m.s^{-1}}$$

D'où la vitesse de l'électron de recul

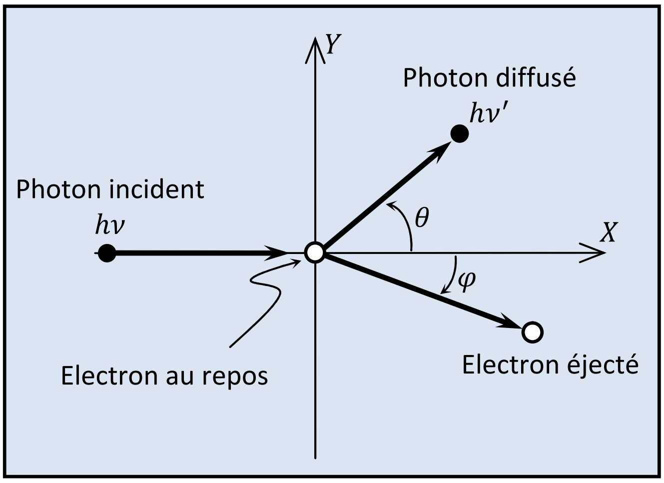
$$\boxed{v_{\text{élec}} = p_{\text{élec}}/m} \qquad \text{Numériquement :} \qquad \boxed{v_{\text{élec}} = 1{,}3852 \times 10^{8}\ m.s^{-1}}$$

Angle d'éjection de l'électron de recul

$$mc.v_{\text{élec}}\sin\varphi = h\nu'\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin\varphi = \frac{h\nu'}{c.p_{\text{élec}}}\sin\theta} \qquad \text{Numériquement :} \qquad \boxed{\varphi = 16{,}47°}$$

EXERCICE 06 : ***Effet Compton***.

1. Conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.



Conservation de l'énergie totale : $h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$

Conservation de la quantité de mouvement $\vec{p}_{\text{photon}} = \vec{p}'_{\text{photon}} + m.\vec{v}_{\text{élec}}$

En projetant sur l'axe (OX) :

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + m.v_{\text{élec}}\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad mc.v_{\text{élec}}\cos\varphi = h\nu - h\nu'\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots \ (2)$$

En projetant sur l'axe (OY) :

$$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - m.v_{\text{élec}}\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad mc.v_{\text{élec}}\sin\varphi = h\nu'\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots \ (3)$$

2. Variation de la longueur d'onde.

En prenant la somme des carrés des équations (2) et (3) on trouve

$$m^2c^2v_{\text{élec}}^2 = p_{\text{élec}}^2c^2 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h\nu.h\nu'.\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (4)$$

Or on sait que : $m^2c^4 = p_{\text{élec}}^2c^2 + m_0^2c^4 \quad \Rightarrow \quad p_{\text{élec}}^2c^2 = m^2c^4 - m_0^2c^4$

Et d'après l'équation (1) :

$$m^2c^4 = (h\nu - h\nu' + m_0c^2)^2 = (h\nu - h\nu')^2 + m_0^2c^4 + 2(h\nu - h\nu').m_0c^2$$

Donc

$$p_{\text{élec}}^2c^2 = (h\nu - h\nu')^2 + 2(h\nu - h\nu').m_0c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (5)$$

En comparant (4) et (5) on trouve

$$h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h\nu.h\nu'.\cos\theta = (h\nu - h\nu')^2 + 2(h\nu - h\nu').m_0c^2$$

D'où

$$2h\nu.h\nu'.(1-\cos\theta) = 2(h\nu - h\nu').m_0c^2$$

Et

$$\frac{\nu - \nu'}{\nu.\nu'} = \frac{h}{m_0c^2}(1-\cos\theta)$$

Enfin on a la relation donnant la variation de la longueur d'onde $\lambda = c/\nu$ en fonction de θ.

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1-\cos\theta)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\lambda_c = \frac{h}{m_0c}}$$

Tel que $\lambda_c = 2{,}426 \times 10^{-12}\ m$ est une constante appelée longueur d'onde de Compton.

3. Pour des photons dont l'énergie est égale à l'énergie au repos des électrons.

$$h\nu = m_0 c^2$$

Donc

$$\frac{hc}{\lambda} = m_0 c^2$$

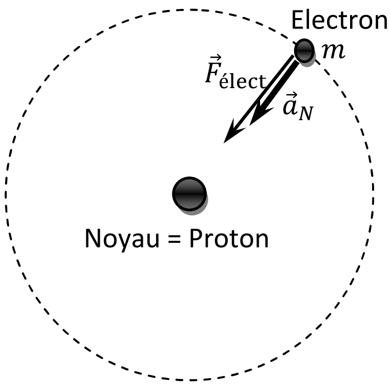
D'où leur longueur d'onde est égale à la longueur d'onde Compton, soit

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{m_0 c} = \lambda_c}$$

EXERCICE 07 : ***Modèle de Bohr de l'atome d'Hydrogène***.

Soit un électron décrivant un mouvement circulaire uniforme autour d'un proton immobile :

1. Position et énergie de l'électron.



$$\vec{F}_{\text{élect}} = -K\frac{e^2}{r^2}\vec{e}_r = m.\vec{a}_N \qquad \Rightarrow \qquad K\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Donc

$$E_C = \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}K\frac{e^2}{r}$$

L'énergie potentielle de l'électron est

$$E_P = -K\frac{e^2}{r}$$

Et l'énergie totale de l'électron est donné par

$$E_T = E_C + E_P = -\frac{1}{2}K\frac{e^2}{r}$$

La condition de quantification

$$\vec{p} = m.\vec{v} = \hbar.\vec{k}$$

Tel que $\vec{k}$ est le vecteur d'onde ($k = 2\pi/\lambda$)

La longueur de l'orbite circulaire de l'électron soit un multiple entier de sa longueur d'onde

$$2\pi.r = n.\lambda \qquad \text{avec} \qquad n \text{ entier naturel}$$

D'où

$$\boxed{m.v.r = n.\hbar}$$

En remplaçant dans l'équation du PFD on trouve

$$m.v^2 = \frac{(n.\hbar)^2}{m.r^2} = K\frac{e^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r_n = \frac{\hbar^2}{K.m.e^2}n^2}$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie totale de l'électron on trouve :

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{2}\frac{K^2.m.e^4}{\hbar^2}\frac{1}{n^2}}$$

2. Pour le premier niveau $(n = 1)$.

$$\boxed{r_1 = \frac{\hbar^2}{K.m.e^2} = 0{,}529 \text{ Å}}$$

$$\boxed{E_1 = -\frac{1}{2}\frac{K^2.m.e^4}{\hbar^2} = -13{,}58\ eV}$$

3. Constante de Rydberg R.

Les raies d'émission (ou d'absorption) sont obtenues lorsque l'électron passe d'une orbite d'énergie E_{n_2} à une orbite d'énergie inférieure (ou supérieure) E_{n_1}. Cette perte (ou gain) d'énergie est accompagnée d'une émission (ou absorption) d'un photon de fréquence ν, tel que :

$$h\nu = \left|E_{n_2} - E_{n_1}\right| = \frac{1}{2}\frac{K^2.m.e^4}{\hbar^2}\left|\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right|$$

En remplaçant par la longueur d'onde $\nu = c/\lambda$, nous retrouvons la loi de Rydberg.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{K^2 m.e^4}{4\pi\hbar^3 c}\left|\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right|$$

Avec la constante de Rydberg

$$\boxed{R_\infty = \frac{K^2 m.e^4}{4\pi\hbar^3 c}} \qquad \text{numériquement} \qquad \boxed{R_\infty = 1{,}097 \times 10^7\ m^{-1}}$$

4. Longueurs d'ondes.

Série	Transition	Symbole	Longueur d'onde	Domaine
Lyman	$n_2 = 2 \to n_1 = 1$	K_α	$\lambda_{K_\alpha} = 1{,}125 \times 10^{-7}\ m$	UV
	$n_2 = 3 \to n_1 = 1$	$K_{\beta 1}$	$\lambda_{K_{\beta 1}} = 1{,}025 \times 10^{-7}\ m$	UV
	$n_2 = 4 \to n_1 = 1$	$K_{\beta 2}$	$\lambda_{K_{\beta 2}} = 0{,}972 \times 10^{-7}\ m$	UV
Balmer	$n_2 = 3 \to n_1 = 2$	H_α	$\lambda_{H_\alpha} = 6{,}563 \times 10^{-7}\ m$	Visible
	$n_2 = 4 \to n_1 = 2$	H_β	$\lambda_{H_\beta} = 4{,}861 \times 10^{-7}\ m$	Visible
	$n_2 = 5 \to n_1 = 2$	H_γ	$\lambda_{H_\gamma} = 4{,}340 \times 10^{-7}\ m$	Visible

5. Dans le cas où en prend en compte l'entrainement du noyau.

L'ensemble noyau-électron tourne autour du centre de masse du système. Dans ce cas, le système à deux corps est ramené à l'étude, dans le repère du centre de masse, d'une particule de masse égale à la masse réduite :

$$\mu = \frac{m_e . m_N}{m_e + m_N}$$

La constante de Rydberg devient

$$\boxed{R_H = \frac{K^2 \mu.e^4}{4\pi\hbar^3 c}} \qquad \text{numériquement} \qquad \boxed{R_H = 1{,}096 \times 10^7\ m^{-1}}$$

Et les longueurs d'ondes.

Série	Transition	Symbole	Longueur d'onde	Domaine
Lyman	$n_2 = 2 \to n_1 = 1$	K_α	$\lambda_{K_\alpha} = 1{,}126 \times 10^{-7}\ m$	UV
	$n_2 = 3 \to n_1 = 1$	$K_{\beta 1}$	$\lambda_{K_{\beta 1}} = 1{,}026 \times 10^{-7}\ m$	UV
	$n_2 = 4 \to n_1 = 1$	$K_{\beta 2}$	$\lambda_{K_{\beta 2}} = 0{,}973 \times 10^{-7}\ m$	UV
Balmer	$n_2 = 3 \to n_1 = 2$	H_α	$\lambda_{H_\alpha} = 6{,}569 \times 10^{-7}\ m$	Visible
	$n_2 = 4 \to n_1 = 2$	H_β	$\lambda_{H_\beta} = 4{,}866 \times 10^{-7}\ m$	Visible
	$n_2 = 5 \to n_1 = 2$	H_γ	$\lambda_{H_\gamma} = 4{,}344 \times 10^{-7}\ m$	Visible

EXERCICE 08 : ***Modèle de Bohr***.

1. **Energie du système en fonction de la distance électron-proton.**

$$\vec{F}_{\text{élect}} = -K\frac{e^2}{r^2}\vec{e}_r = m.\vec{a}_N \qquad \Rightarrow \qquad K\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Donc

$$E_C = \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}K\frac{e^2}{r}$$

L'énergie potentielle de l'électron est

$$E_P = -K\frac{e^2}{r}$$

Et l'énergie totale de l'électron est donné par

$$E_T = E_C + E_P = -\frac{1}{2}K\frac{e^2}{r}$$

2. **Condition de quantification.**

$$\vec{p} = m.\vec{v} = \hbar.\vec{k}$$

Tel que $\vec{k}$ est le vecteur d'onde ($k = 2\pi/\lambda$)

La longueur de l'orbite circulaire de l'électron soit un multiple entier de sa longueur d'onde

$$2\pi.r = n.\lambda \qquad \text{avec} \quad n \text{ entier naturel}$$

D'où

$$\boxed{m.v.r = n.\hbar}$$

En remplaçant dans l'équation du PFD on trouve

$$m.v^2 = \frac{(n.\hbar)^2}{m.r^2} = K\frac{e^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r_n = \frac{\hbar^2}{K.m.e^2}n^2}$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie totale de l'électron on trouve :

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{2}\frac{K^2.m.e^4}{\hbar^2}\frac{1}{n^2}}$$

3. **Fréquence des photons émis ou absorbés** par l'atome lors de transitions entre deux niveaux.

Les raies d'émission (ou d'absorption) sont obtenues lorsque l'électron passe d'une orbite d'énergie E_{n_2} à une orbite d'énergie inférieure (ou supérieure) E_{n_1}. Cette perte (ou gain) d'énergie est accompagnée d'une émission (ou absorption) d'un photon de fréquence ν, tel que :

$$\boxed{h\nu = \left|E_{n_2} - E_{n_1}\right| = \frac{1}{2}\frac{K^2.m.e^4}{\hbar^2}\left|\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right|}$$