Cours de Robotique pour les 2ème Année Ma
Automatique

د. دليـــلة جــــــودي

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Cours mis en ligne sur : http://www.univ-djelfa.dz:1758/educ/course/view.php?id=25

General definitions

Mechanical components of a robot

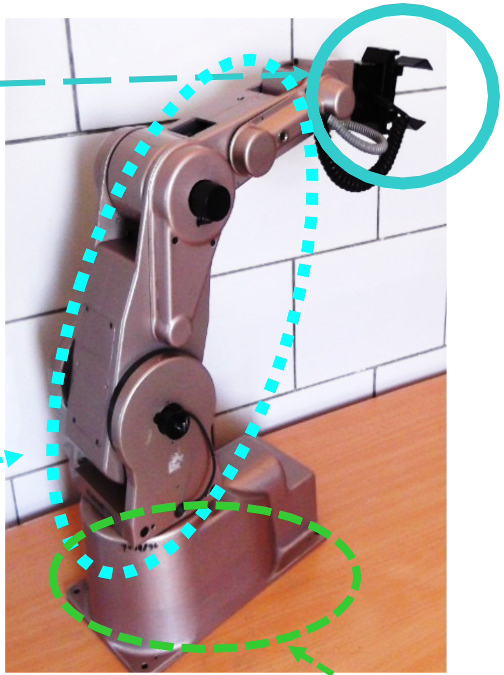
The mechanism of a robot manipulator consists of two distinct subsystems :

1-The end-effector :

A device intended to manipulate objects (magnetic, electric or pneumatic grippers) or to transform them (tools, welding torches, paint guns, etc.).

2-The articulated mechanical structure :

Its role is to place the end-effector at a given location (position and orientation) with a desired velocity and acceleration.



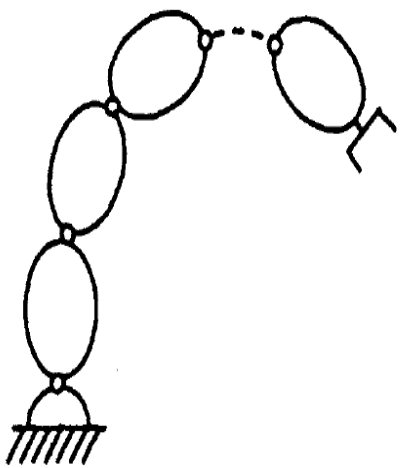
The base

General definitions

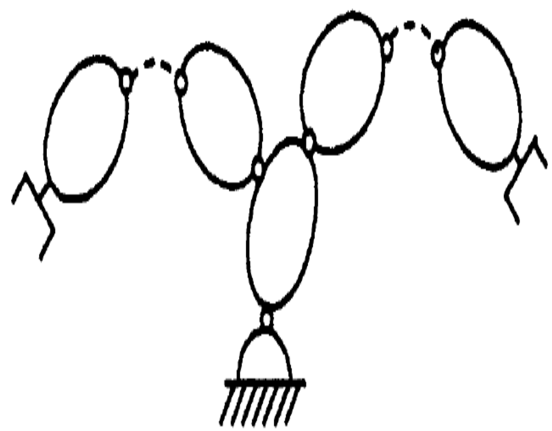
Mechanical components of a robot

2-The articulated mechanical structure :

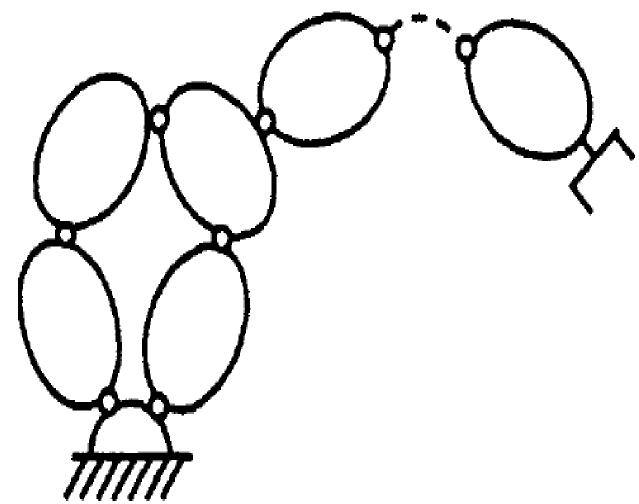
The robot's mechanical structure is an articulated chain of links. There three kinds of chains /



1/ Serial chain (open or simple)



2/Tree structured chain



3/Closed chain

Complex chain : One link has two joints

General definitions

Mechanical components of a robot

Joints :

A joint connects two successive links, thus limiting the number of degrees of freedom between them.

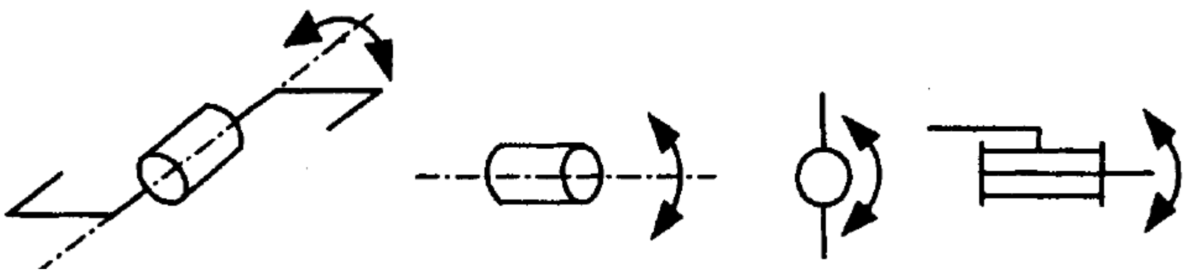
- **Frequently , in robotics, the joint has one degree of freedon, it is either *revolute* or *prismatic.***

- ***A complex joint with several degrees of freedom can be constructed by* an equivalent combination of revolute and prismatic joints**

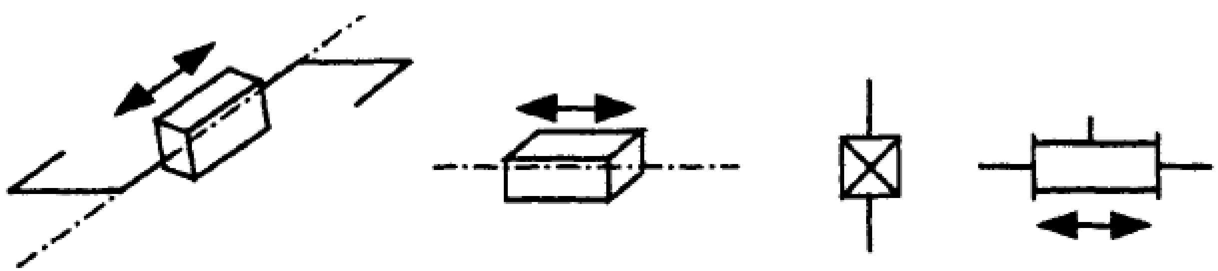
General definitions

Mechanical components of a robot

a)Revolute joint R **:This limits the motion between two links to a rotation about a common axis.**



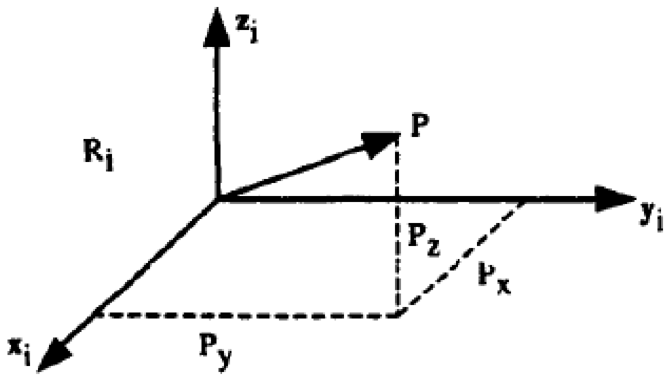
b)Prismatic joint P **: This limits the motion between two links to a translation along a common axis.**



General definitions

Homogenous coordinates

Representation of a point:



$$
{}^{i}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} {}^{i}P_x \\ {}^{i}P_y \\ {}^{i}P_z \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Scaling factor =1 in robotics

Representation of a direction (free vector)

If the Cartesian coordinates of a unit vector u with respect to frame R, are $({}^{i}u_x, {}^{i}u_y, {}^{i}u_z)$ its homogeneous coordinates will be:

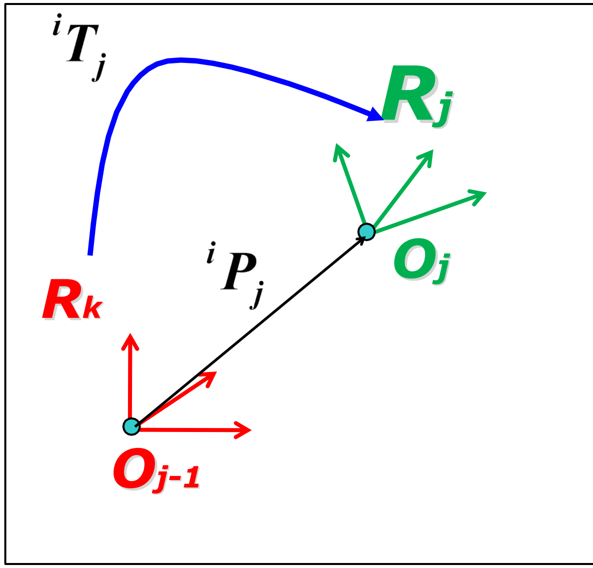
$$
{}^{i}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} {}^{i}u_x \\ {}^{i}u_y \\ {}^{i}u_z \\ 0 \end{bmatrix}
$$

General definitions

Homogenous coordinates

Transformation of frames

The transformation, translation and/or rotation, of a frame Ri into frame Rj is represented by the (4x4) homogeneous transformation matrix iTj such that:



$$ {}^{i}\mathbf{T}_{j} = [{}^{i}\mathbf{s}_{j} \;\; {}^{i}\mathbf{n}_{j} \;\; {}^{i}\mathbf{a}_{j} \;\; {}^{i}\mathbf{P}_{j}] = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

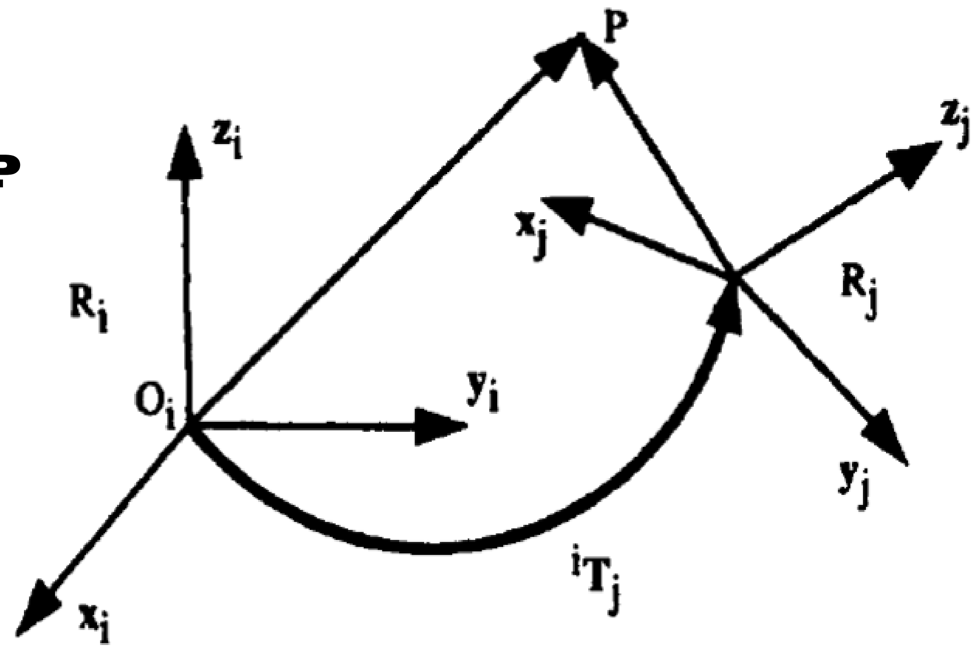
$$ {}^{j-1}T_{j} = \left[{}^{j-1}s_{j} \;\; {}^{j-1}n_{j} \;\; {}^{j-1}a_{j} \;\; {}^{j-1}P_{j} \right] = \begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{j-1}A_{j} & & & {}^{j-1}P_{j} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

General definitions

Homogenous coordinates

Transformation of vectors

Let the vector $^{j}\mathbf{P}$ define the homogeneous coordinates of the point $\mathbf{P}$ with respect to frame j



The homogeneous coordinates of $\mathbf{P}$ with respect to frame $\mathbf{Rj}$ can be obtained as

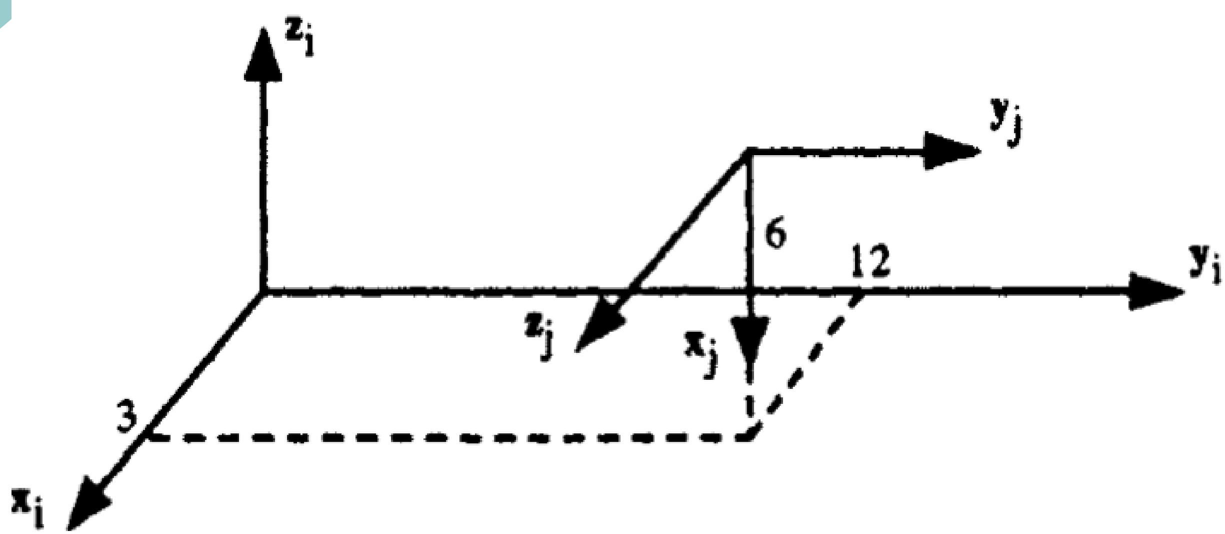
$$^{i}\mathbf{P} = {}^{i}(\mathbf{O_iP}) = {}^{i}\mathbf{s}_j\,{}^{j}P_x + {}^{i}\mathbf{n}_j\,{}^{j}P_y + {}^{i}\mathbf{a}_j\,{}^{j}P_z + {}^{i}\mathbf{P}_j = {}^{i}\mathbf{T}_j\,{}^{j}\mathbf{P}$$

General definitions

Homogenous coordinates

Example **Deduce the matrices** ${}^{i}T_{j}$ and ${}^{j}T_{i}$ **from the figure below using the matrix**

$$T=\begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



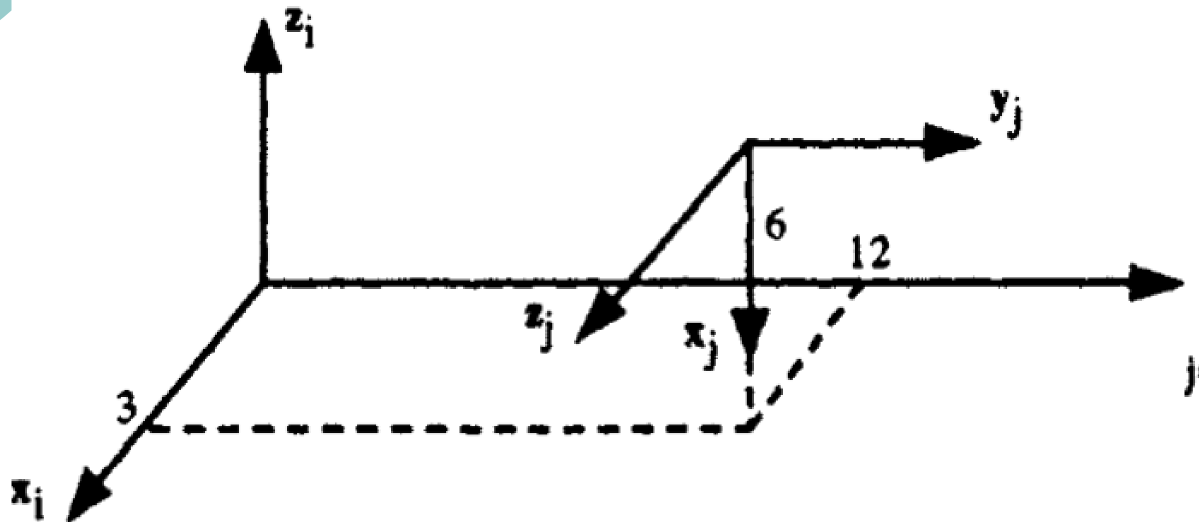
General definitions

Homogenous coordinates

Example

$$T=\begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^{i}T_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



$$^{j}T_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogenous coordinates

Transformation matrix of a pure translation

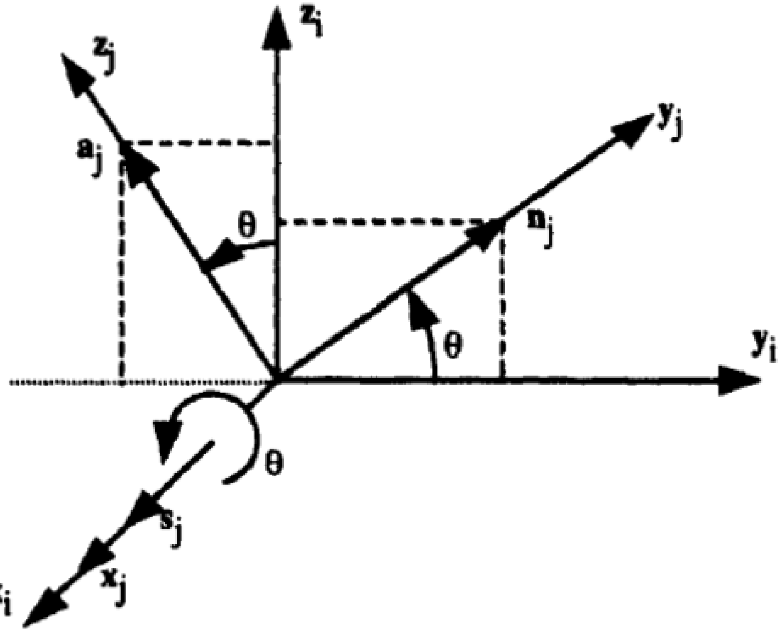
Let a, b and c denote the translation along the x, y and z axes respectively.

Since the orientation is invariant; the transformation matrix of pure tranlation is denoted **Trans**(a,b,c) and it is expressed as :

$$ {}^{i}T_{j} = \mathbf{Trans}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Homogenous coordinates

Transformation matrices of a rotation about the three exes x, y , z



1/Rotation about x

$$
\begin{cases}
{}^{i}\mathbf{s}_j = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\
{}^{i}\mathbf{n}_j = [0 \quad C\theta \quad S\theta \quad 0]^T \\
{}^{i}\mathbf{a}_j = [0 \quad -S\theta \quad C\theta \quad 0]^T
\end{cases}
$$

$$
{}^{i}\mathbf{T}_j = \mathbf{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \mathbf{rot}(x, \theta) & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Homogenous coordinates

Transformation matrices of a rotation about the three exes x, y , z.

2/Rotation about the axe y

$$ {}^{i}T_j = Rot(y,\theta) = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & rot(y,\theta) & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

3/Rotation about the axe z

$$ {}^{i}T_j = Rot(z,\theta) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & rot(z,\theta) & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Chapitre 1

Modèle géométrique direct des robots à chaîne ouverte simple

1 Introduction

La conception et la commande des robots nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que :

✓Les modèles de transformation entre l'espace opérationnel (situation de l'organe terminal) et l'espace articulaire (configuration du robot). On distingue :

- ✓Les modèles géométriques direct et inverse qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement.

- ✓Les modèles cinématiques direct et inverse qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires et inversement .

- ✓les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercés

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 1

Modèle géométrique direct des robots à chaîne ouverte simple

1.1 Description de la géométrie du robot

- Corps supposés rigides interconnectés par des articulations (rotoïdes ouprismatiques)
- Le repère Rj est lié au corps Cj
- La variable de l'articulation j est notée q_j.

- Le domaine articulaire est décris par

$$q = [q_1 \quad q_2 \cdots q_n]^T$$

Avec $q_j = \sigma_j r_j + \bar{\sigma}_j \theta_j$

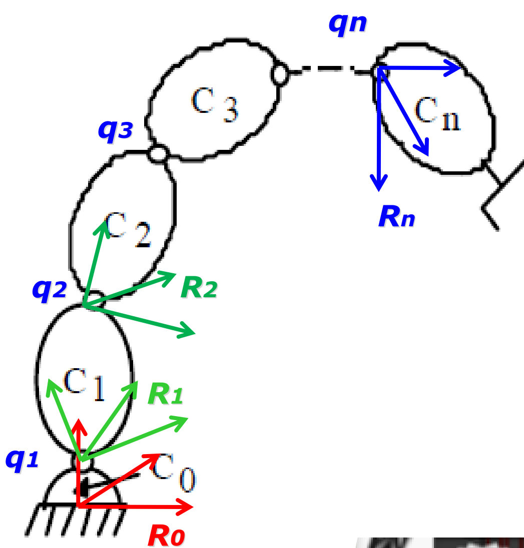
.

Et $\sigma_j = 0$ pour l'articulation rotoide

$\sigma_j = 1$ pour l'articulation prismatique

- Le domaine opérationnel est décris par .

$$X = [x_1 \quad x_2 \cdots x_n]^T$$



dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 1

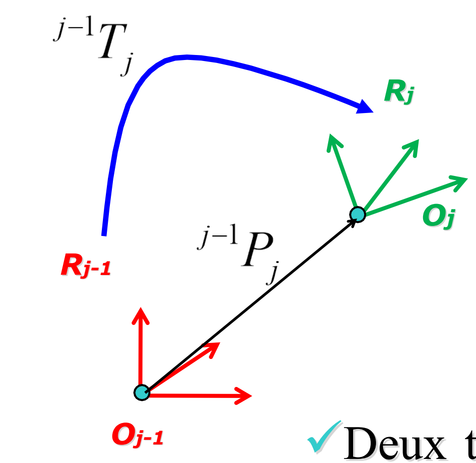
Modèle géométrique direct des robots à chaîne ouverte simple

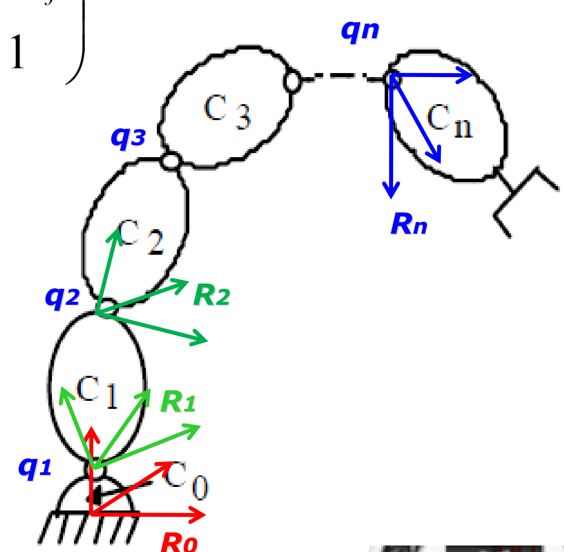
1.1 Description de la géométrie du robot

- Chaque articulation qui bouge fait bouger le corps suivant et par conséquent le repère.
- La transformation entre deux repères j-1 et j est décrite par la matrice de passage

$$ {}^{j-1}T_j = \left[{}^{j-1}s_j \;\; {}^{j-1}n_j \;\; {}^{j-1}a_j \;\; {}^{j-1}P_j \right] = \begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{j-1}A_j & & & {}^{j-1}P_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Projection de la nouvelle base dans l'ancienne base





- Deux transformations consécutives impliquent une multiplication des matrices de passage exemple : ${}^{0}T_2 = {}^{0}T_1\,{}^{1}T_2$

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

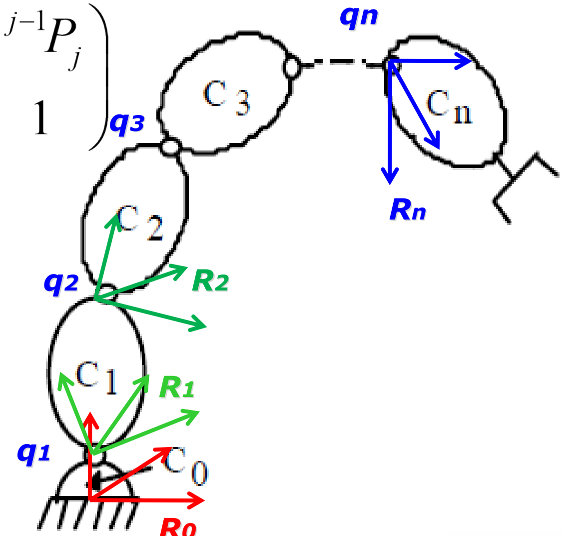
Chapitre 1

Modèle géométrique direct des robots à chaîne ouverte simple

1.1 Description de la géométrie du robot

✓**Quelques propriétés de la matrice de passage :**

$$^{j-1}T_j = \left[^{j-1}s_j \;\; ^{j-1}n_j \;\; ^{j-1}a_j \;\; ^{j-1}P_j \right] = \begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^{j-1}A_j & & & ^{j-1}P_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



a) La matrice A est orthogonale $\;^{j-1}A_j^{-1} = {}^{j}A_{j-1}^{T}$

b) $^{j}P_1 = {}^{j}T_i \, {}^{i}P_1$

c) $^{i}T_j^{-1} \, {}^{i}P_1 = {}^{j}P_1$

d) $^{i}T_j^{-1} = {}^{j}T_i$

e) $^{0}T_n = {}^{0}T_1 \, {}^{1}T_2 \ldots\ldots {}^{n-1}T_n$

✓On cherche les situations de tous les repères du robots, donc il faut bien les placer.

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 1

Modèle géométrique direct des robots à chaîne ouverte simple

1.1 Description de la géométrie du robot

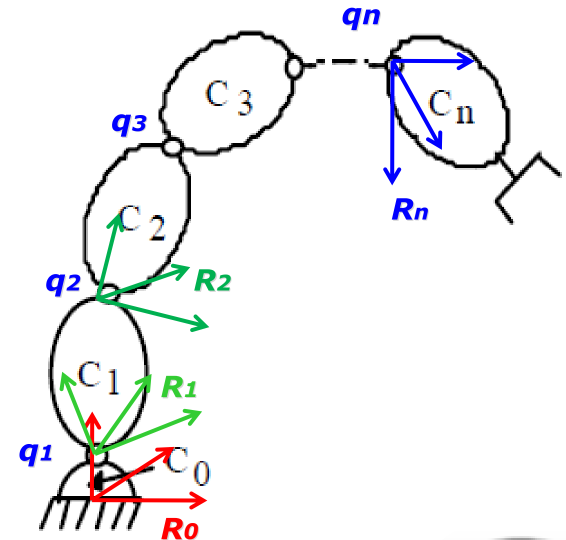
✓**Convention de placement des repères sue les corps du robot:**

Le repère Rj, fixé au corps Cj, est défini de sorte que :

– L'axe z_j est porté par l'axe de l'articulation j ;
– L'axe x_j est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_j et z_{j+1} ;

- **Si les axes zj et zj+1 sont parallèles l'axe x_j se trouvent dans le plan défini par eux. Dans ce cas le choix de x_j n'est pas unique.**
- **Si les axes zj et zj+1 sont concourants, l'axe xj passe par leur point d'intersection et constitue le normal au plan formé par zj et zj+1.**

- L'axe yj est défini de façon unique à partir de xj et zj afin de former un repère orthonormé direct.



dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 1

Modèle géométrique direct des robots à chaîne ouverte simple

1.1 Description de la géométrie du robot

✓**Description du passage entre deux repères consécutifs selon Khalil-Kleinfinger:**

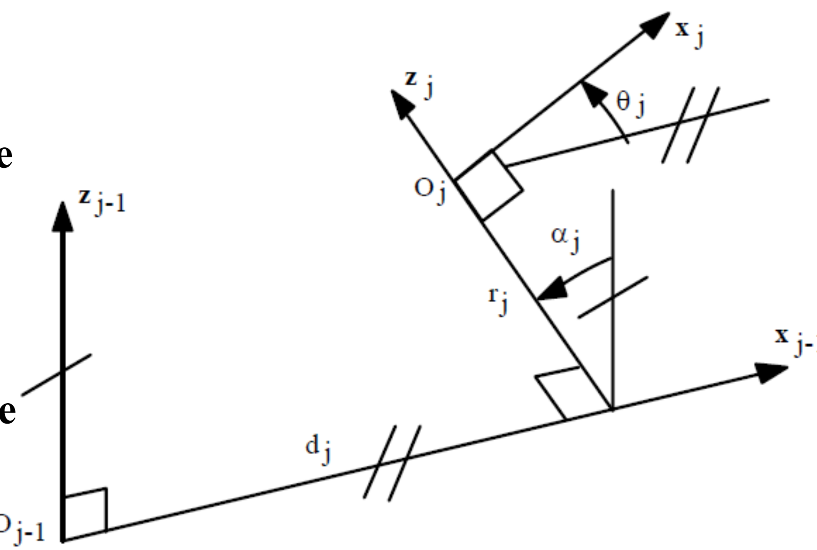
La convention pour définir le passage du repère R_{j-1} au repère R_j s'exprime en fonction des quatre paramètres suivants :

-) α_j : angle entre les axes Z_{j-1} et Z_j, correspondant à une rotation autour de X_{j-1}.

-) d_j : distance entre Z_{j-1} et Z_j le long de X_{j-1}.

-) θ_j : angle entre les axes X_{j-1} et X_j, correspondant à une rotation autour de Z_j.

-) r_j : distance entre X_{j-1} et X_j le long de Z_j.



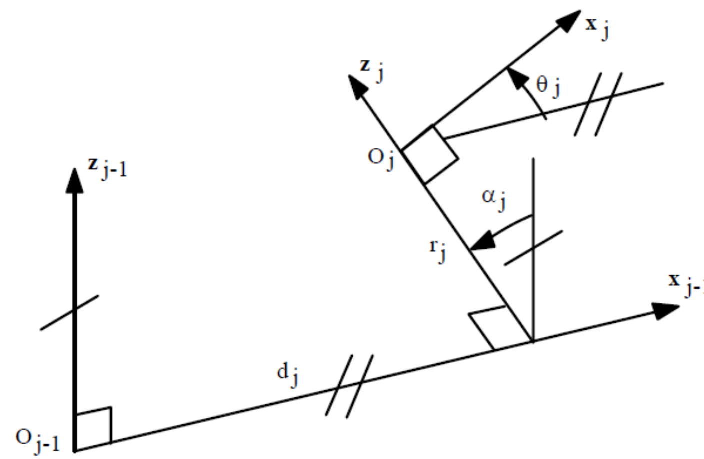
Chapitre 1

Modèle géométrique direct des robots à chaîne ouverte simple

1.1 Description de la géométrie du robot

✓**Description du passage entre deux repères consécutifs selon Khalil-Kleinfinger:**

Avec ces paramètres la matrice de transformation définissant le repère R_j dans le repère $R_{j\text{-}1}$ est donnée par :



$$ {}^{j\text{-}1}T_j = Rot\ (x,\ \alpha_j)\ Trans\ (x,\ d_j)\ Rot\ (z,\ \theta_j)\ Trans\ (z,\ r_j) $$

$$ {}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_j & -s\alpha_j & 0 \\ 0 & s\alpha_j & c\alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j & 0 & 0 \\ s\theta_j & c\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ \Rightarrow \quad {}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j & 0 & d_j \\ c\alpha_j s\theta_j & c\alpha_j c\theta_j & -s\alpha_j & -r_j s\alpha_j \\ s\alpha_j s\theta_j & s\alpha_j c\theta_j & c\alpha_j & r_j c\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Chapitre 1

Modèle géométrique direct des robots à chaîne ouverte simple

1.1 Description de la géométrie du robot

✓ **Tableau de paramètres géométriques:**

•**Après le placement des repères sur toutes les articulations on remplit le tableau selon les valeurs des quatres paramètres α_j , d_j , θ_j , r_j .**

• **Ce tableau nous permet de calculer toutes les matrices de transformations homogène entre tous les repères de j=1 à j=n.**

j	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
1					
2					
3					
4					
..					
n					

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

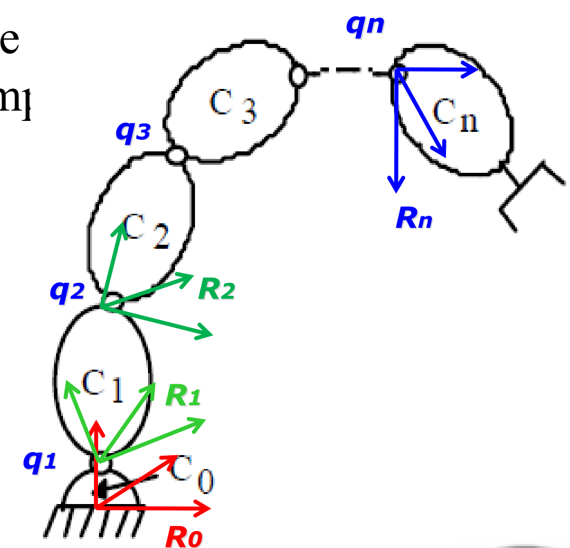
Chapitre 1

Modèle géométrique direct des robots à chaîne ouverte simple

1.1 Modèle géométrique direct

✓ **Modèle géométrique direct:**

Le modèle géométrique direct (MGD) est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal, c'est-à-dire les coordonnées opérationnelles du robot, en fonction de coordonnées articulaires. Dans le cas d'une chaîne ouverte simp il peut être représenté par la matrice de passage :



$$ {}^{0}T_{n}(q) = {}^{0}T_{1}(q_{1})\,{}^{1}T_{2}(q_{2}) \ldots\ldots {}^{n-1}T_{n}(q_{n}) $$

q étant le vecteur des variables articulaires tel que :

q = [q1 q2 … qn]

Les coordonnées opérationnelles sont définies par :

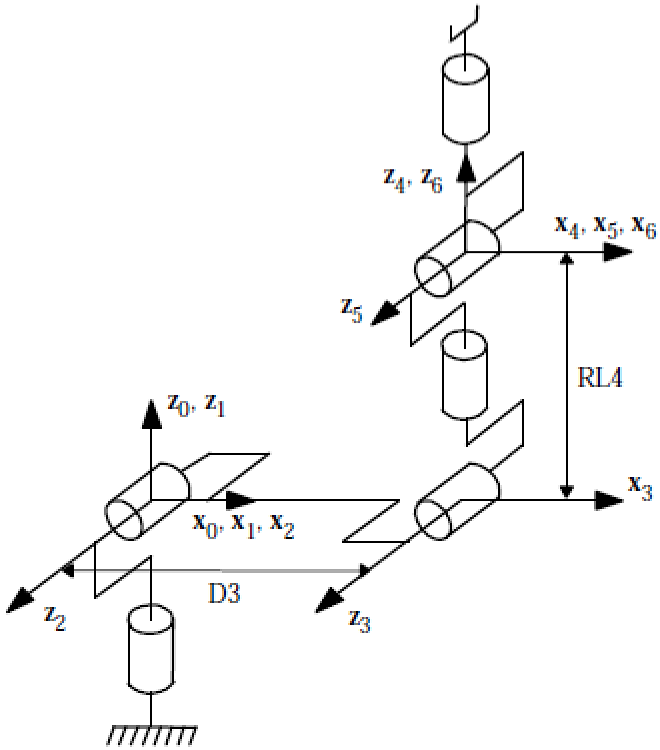
X = [x1 x2 … xm]T

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 1

Modèle géométrique direct des robots à chaîne ouverte simple

Exemple : Solution Modèle géométrique direct du robot Stäubli RX -90.



j	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
1	0	0	0	θ_1	0
2	0	$\pi/2$	0	θ_2	0
3	0	0	D3	θ_3	0
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4	RL4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5	0
6	0	$-\pi/2$	0	θ_6	0

Paramètres géométriques du robot Stäubli RX-90

Chapitre 1

1. Modèle géométrique direct des robots à chaîne ouverte simple

Solution Modèle géométrique direct

La matrice de transformation homogène générale est de la frome

$$
{}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j & 0 & d_j \\ c\alpha_j s\theta_j & c\alpha_j c\theta_j & -s\alpha_j & -r_j s\alpha_j \\ s\alpha_j s\theta_j & s\alpha_j c\theta_j & c\alpha_j & r_j c\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

j	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
1	0	0	0	θ_1	0
2	0	$\pi/2$	0	θ_2	0
3	0	0	D3	θ_3	0
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4	RL4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5	0
6	0	$-\pi/2$	0	θ_6	0

Paramètres géométriques du robot Stäubli RX-90

Cours Robotique Master Auto Université Djelfa
dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

2.2.2 Solution Modèle géométrique direct et inverse du robot Stäubli RX-90.

Les matrices de transformation homogène de 0 à 6 sont

$$
{}^{0}\mathbf{T}_{1} = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
{}^{1}\mathbf{T}_{2} = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
{}^{2}\mathbf{T}_{3} = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & D3 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{3}\mathbf{T}_{4} = \begin{bmatrix} C4 & -S4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & R4 \\ -S4 & -C4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
{}^{4}\mathbf{T}_{5} = \begin{bmatrix} C5 & -S5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S5 & C5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
{}^{5}\mathbf{T}_{6} = \begin{bmatrix} C6 & -S6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S6 & -C6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

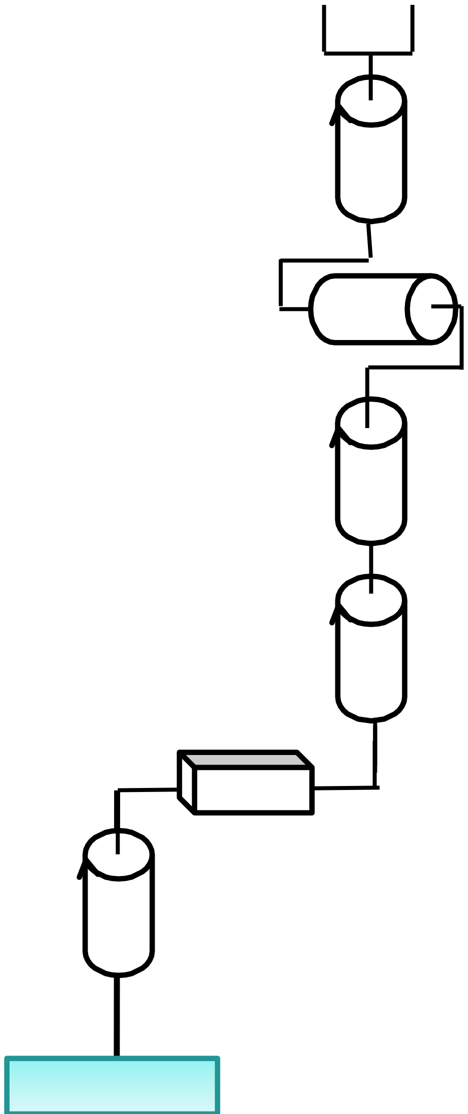
2.2.2 Solution Modèle géométrique direct et inverse du robot Stäubli RX-90.

MGD :

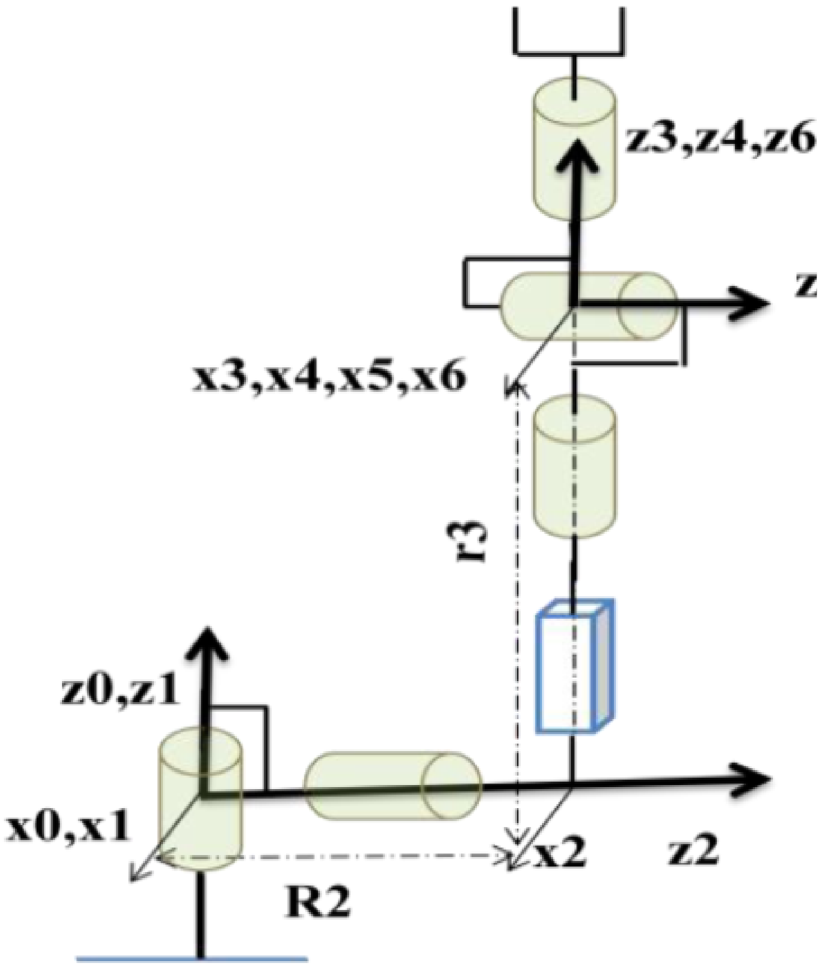
$$
U_0 \left\{
\begin{array}{l}
s_x = C1\left(C23\left(C4C5C6 - S4S6\right) - S23S5C6\right) - S1\left(S4C5C6 + C4S6\right) \\
s_y = S1\left(C23\left(C4C5C6 - S4S6\right) - S23S5C6\right) + C1\left(S4C5C6 + C4S6\right) \\
s_z = S23\left(C4C5C6 - S4S6\right) + C23S5C6 \\
n_x = C1\left(-C23\left(C4C5C6 + S4S6\right) + S23S5S6\right) + S1\left(S4C5S6 - C4C6\right) \\
n_y = S1\left(-C23\left(C4C5C6 + S4S6\right) + S23S5S6\right) - C1\left(S4C5S6 - C4C6\right) \\
n_z = -S23\left(C4C5S6 + S4C6\right) - C23S5S6 \\
a_x = -C1\left(C23C4S5 + S23C5\right) + S1S4S5 \\
a_y = -S1\left(C23C4S5 + S23C5\right) - C1S4S5 \\
a_z = -S23C4S5 + C23C5 \\
P_x = -C1\left(S23R4 - C2D3\right) \\
P_y = -S1\left(S23R4 - C2D3\right) \\
P_z = C23R4 + S2D3
\end{array}
\right.
$$

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Robot Standford



dalila.djoudi@univ-djelfa.dz



j	σ_j	α_j	d_j	Θ_j	r_j
1	0	0	0	Θ_1	0
2	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	Θ_2	R2
3	1	$\frac{\pi}{2}$	0	0	r3
4	0	0	0	Θ_4	0
5	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	Θ_5	0
6	0	$\frac{\pi}{2}$	0	Θ_6	0

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Coı

α_j : angle entre les axes Z_{j-1} et Z_j, correspondant à une rotation autour de X_{j-1}.

d_j : distance entre Z_{j-1} et Z_j le long de X_{j-1}.

θ_j : angle entre les axes X_{j-1} et X_j, correspondant à une rotation autour de Z_j.

r_j : distance entre X_{j-1} et X_j le long de Z_j. **(1pt)**

j	σ_j	α_j	d_j	Θ_j	r_j
1	0	0	0	Θ_1	0
2	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	Θ_2	R2
3	1	$\frac{\pi}{2}$	0	0	r3
4	0	0	0	Θ_4	0
5	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	Θ_5	0
6	0	$\frac{\pi}{2}$	0	Θ_6	0

(1.5pt)

4. --

On pose : T1=Θ_1, T2=Θ_2, T3=Θ_3

(0.5pt)

$$^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos(T1) & -\sin(T1) & 0 & 0 \\ \sin(T1) & \cos(T1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos(T2) & -\sin(T2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & R2 \\ -\sin(T2) & -\cos(T2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos(T3) & -\sin(T3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -r3 \\ \sin(T3) & \cos(T3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$^0A_1$ $\quad$ $^0P_1$

Le modèle géométrique direct du repère 0 au repère 3 est calculé par :

$$^0T_3 = {}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3$$ **(0.5pt)**

Ce qui donne :

$$^0T_3 = \begin{bmatrix} C(t1)*C(t2) & -S(t1) & C(t1)*S(t2) & -(R2*S(t1)) + r3*C(t1)*S(t2) \\ C(t2)*S(t1) & C(t1) & S(t1)*S(t2) & R2*C(t1) + r3*S(t1)*S(t2) \\ -S(t2) & 0 & C(t2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$