Chapitre 4
Modèle Dynamique

4.1 Introduction

Le modèle dynamique d'un manipulateur à un rôle important dans l'analyse du comportement d'un manipulateur, pour la conception des méthodologies de commandes et pour la simulation du mouvement, qui permet de développer des améliorations aux stratégies de contrôle sans avoir besoin d'un manipulateur expérimental

- ✓ Deux méthodes pour d'obtention des équations du mouvement d'un manipulateur dans l'espace articulaire
  - ❖ ***Formalisme de Lagrange***
  - ❖ ***Formalisme de Newton Euler***

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique

4.1 Introduction

On représente le modèle dynamique (inverse **MDI**) par une relation de la forme

Vecteur des accélérations articulaires

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_e)$$

Effort extérieur (forces et moments) qu'exerce le robot sur l'environnement

Avec :

Γ vecteur des couples/forces des actionneurs, selon que l'articulation est rotoïde ou prismatique. Dans la suite, on écrira tout simplement couple

Le modèle de simulation est le modèle dynamique direct **MDD** donnée par la forme

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \Gamma, f_e)$$

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

4.2 Formalisme De Lagrange

Le formalisme de Lagrange décrit les équations du mouvement, lorsque l'effort extérieur sur l'organe terminal est supposé nul, par l'équation suivante :

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Avec :

- L : lagrangien du système égale à E-U
- E : énergie cinétique totale du système
- U : énergie potentielle totale du système.

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Lagrange

4.2.1 Forme Générale Des Equations Dynamiques

La forme générale du modèle dynamique est donnée sous forme matricielle

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q), \quad \text{avec } \Gamma=[\tau_1,\dots\tau_n], q=[q_1,\dots q_n]$$

$$\dot{q}=[\dot{q}_1,\dots\dot{q}_n], \ddot{q}=[\ddot{q}_1,\dots\ddot{q}_n]$$

Où $A(q)$ est la matrice d'inertie ($n\times n$), définie positive.

$C(q,\dot{q})\dot{q} = \dot{A}\dot{q} - \frac{\partial E}{\partial q}$: Vecteur ($n\times 1$) représentant les couples/forces de Coriolis et des forces centrifuges.

Eléments calculés par le symbole de Christoffel $c_{i,jk}$

$$\begin{cases} c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,jk}\dot{q}_k \\ c_{i,jk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i}\right] \end{cases}$$

$G(q) = \frac{\partial U}{\partial q}$ vecteur ($n\times 1$) des couples/forces de gravité.

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Lagrange

4.2.1 Forme Générale Des Equations Dynamiques

Pou calculer ce modèle il faut calculer l'énergie cinétique totale du système E et son énergie potentielle totale U.

- L'énergie potentielle est uniquement fonction de la configuration articulaire

Cours Robotique Master Auto Université Djelfa
dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Lagrange

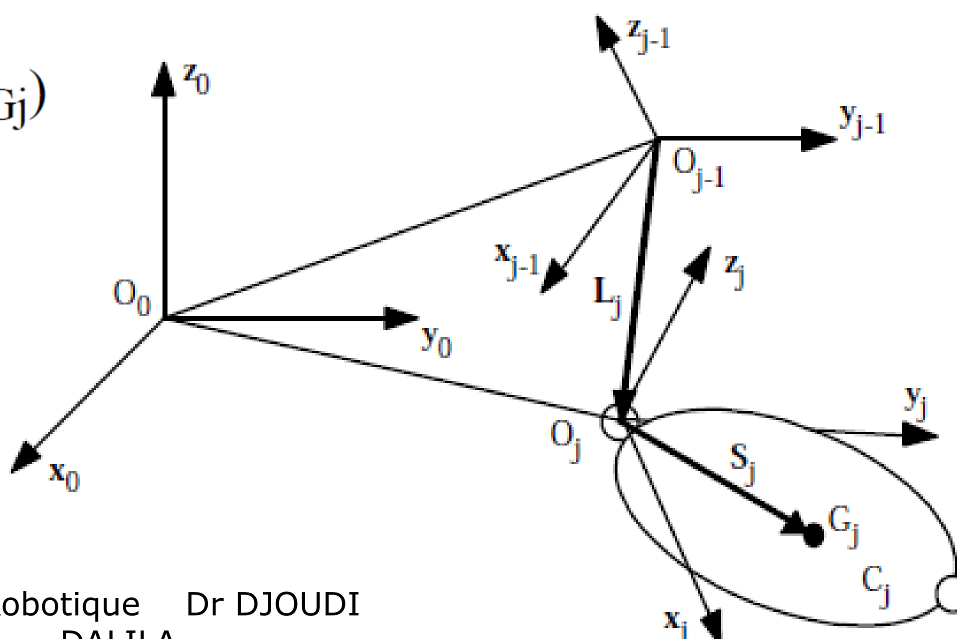
4.2.2 Calcul de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique totae du robot est donnée par la relation

$$E = \sum_{j=1}^{n} E_j$$ Elle est une fonction quadratique des vitesses $E = \frac{1}{2}\dot{q}^T A\,\dot{q}$

où E_j désigne l'énergie cinétique du corps Cj, qui s'exprime par :

$$E_j = \frac{1}{2}(\omega_j^T \mathbf{I}_{Gj}\, \omega_j + M_j\, \mathbf{V}_{Gj}^T\, \mathbf{V}_{Gj})$$



dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Lagrange

4.2.2 Calcul de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique du système du robot est donnée par la relation

$$\mathbf{E}=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}_j$$

où $\mathbf{E}_j$ **désigne l'énergie cinétique du corps Cj, qui s'exprime par :**

$$\mathbf{E}_j=\frac{1}{2}\left(\omega_j^T \mathbf{I}_{\mathbf{G}_j}\omega_j^T+M_j\mathbf{V}_{\mathbf{G}_j}^T\mathbf{V}_{\mathbf{G}_j}\right)$$

avec

$\mathbf{I}_{\mathbf{G}_j}$ **: moment d'inertie autour du centre de gravité du corps** C_j**.**

w_j **:vitesse de rotation du corps** C_j**.**

M_j **: La masse du corps** $\mathbf{C}_j$

$\mathbf{V}_{\mathbf{G}_j}$ **: vitesse de translation du centre de gravité du corps** C_j**.**

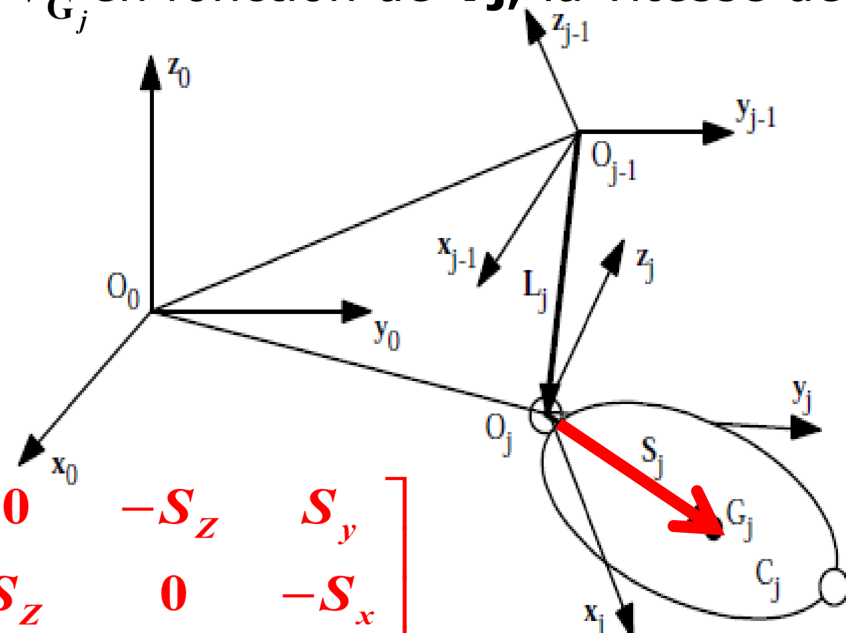
dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

4.2.2 Calcul de l'énergie cinétique

Les mouvements du robot doivent tous s'exprimer dans Oj l'origine du repère Rj.

On écrit :la vitesse du centre de gravité $\mathbf{V}_{G_j}$ en fonction de **Vj,** la vitesse de Oj, Par la formule de champs de vitesse

$$\mathbf{V}_{G_j} = \mathbf{V}_j + \;_{j} \quad \boldsymbol{\omega}_{j}$$



Et $\mathbf{I}_{G_j}$ moment d'inertie au centre de gravité du coprs Cj en fonction de $\mathbf{J}_j$, le moment d'inertie du corps Cj autour de Oj origine de Rj par le théorème de Huigenz

On a

$$\mathbf{J}_j = \mathbf{I}_{G_j} - \mathbf{M}_j \hat{\mathbf{S}}_j \hat{\mathbf{S}}_j \quad \text{avec} \quad \mathbf{S}_j = \overrightarrow{\mathbf{O}_j \mathbf{G}_j} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{S}}_j = \begin{bmatrix} 0 & -S_Z & S_y \\ S_Z & 0 & -S_x \\ -S_y & S_x & 0 \end{bmatrix}$$

est la matrice anti-symmétrique

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Lagrange

4.2.2 Calcul de l'énergie cinétique

La formule d'énergie cinétique de chaque corps Cj

$$\mathbf{E}_j = \frac{1}{2}\left(\omega_j^T \mathbf{I}_{G_j} \omega_j^T + M_j \mathbf{V}_{G_j}^T \mathbf{V}_{G_j}\right)$$

Devient donc:

$$E_j = \frac{1}{2}\ [\ \omega_j^T\ \mathbf{J}_j\ \omega_j + M_j\ \mathbf{V}_j^T\ \ \mathbf{V}_j + 2\ \mathbf{MS}_j^T (\mathbf{V}_j \times \omega_j)]$$

Tous les vecteurs doivent être exprimés dans le repère Rj donc :

$$E_j = \frac{1}{2}\ [{}^j\omega_j^T\ {}^j\mathbf{J}_j\ {}^j\omega_j + M_j\ {}^j\mathbf{V}_j^T\ {}^j\mathbf{V}_j + 2\ {}^j\mathbf{MS}_j^T ({}^j\mathbf{V}_j \times {}^j\omega_j)]$$

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Lagrange

4.2.2 Calcul de l'énergie cinétique

On rappelle que $\omega_j = \omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j \mathbf{a}_j$

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_{j-1} + \omega_{j-1} \text{ x } \mathbf{L}_j + \sigma_j \dot{q}_j \mathbf{a}_j$$

Par projection sur le repère j on a :

$$^j\omega_j = {}^j\mathbf{A}_{j-1} \, {}^{j-1}\omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j \, {}^j\mathbf{a}_j = {}^j\omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j \, {}^j\mathbf{a}_j$$

$$^j\mathbf{V}_j = {}^j\mathbf{A}_{j-1} \left({}^{j-1}\mathbf{V}_{j-1} + {}^{j-1}\omega_{j-1} \text{ x } {}^{j-1}\mathbf{P}_j\right) + \sigma_j \dot{q}_j \, {}^j\mathbf{a}_j$$

Par conséquent l'energie cinétique est calculée

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

4.2.2 Calcul de l'énergie potentielle

L'enegie potentielle s'écrit :

$$U = \sum_{j=1}^{n} U_j = \sum_{j=1}^{n} -M_j \, \mathbf{g}^T \, (\mathbf{L}_{0,j} + \mathbf{S}_j)$$

Lon en déduit que

$$U_j = -[\ {}^0\mathbf{g}^T \quad 0\ ]\ {}^0\mathbf{T}_j \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{MS}_j \\ M_j \end{bmatrix}$$

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

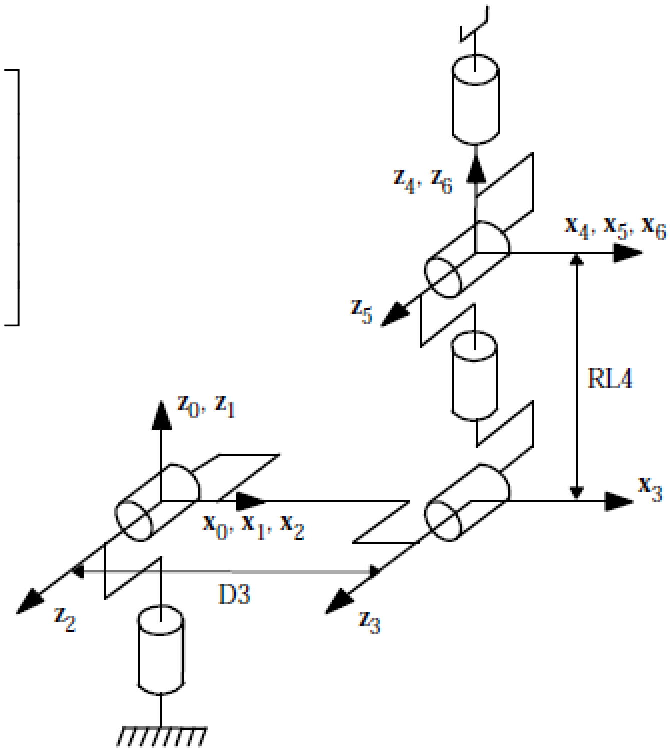
Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Lagrange

EXEMPLE

$$^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & D3 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Lagrange

EXEMPLE *Calcul des vitesses de rotation*

$$^0\omega_0 = \mathbf{0}$$

$$^1\omega_1 = [\,0 \quad 0 \quad \dot{q}_1]^T$$

$$^2\omega_2 = {}^2\mathbf{A}_1\, {}^1\omega_1 + \dot{q}_2\, {}^2\mathbf{a}_2$$

$$= \begin{bmatrix} C2 & 0 & S2 \\ -S2 & 0 & C2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S2\,\dot{q}_1 & C2\,\dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T$$

$$^3\omega_3 = {}^3\mathbf{A}_2\, {}^2\omega_2 + \dot{q}_3\, {}^3\mathbf{a}_3$$

$$= \begin{bmatrix} C3 & S3 & 0 \\ -S3 & C3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S2\,\dot{q}_1 \\ C2\,\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S23\,\dot{q}_1 & C23\,\dot{q}_1 & \dot{q}_2+\dot{q}_3 \end{bmatrix}^T$$

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Lagrange

EXEMPLE *Calcul des vitesses de Tanslation*

$$^{0}\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$$

$$^{1}\mathbf{V}_1 = \mathbf{0}$$

$$^{1}\mathbf{V}_2 = {}^{1}\mathbf{V}_1 + {}^{1}\omega_1 \times {}^{1}\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$$

$$^{2}\mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$$

$$^{2}\mathbf{V}_3 = {}^{2}\omega_2 \times {}^{2}\mathbf{P}_3 = [0 \quad D3\,\dot{q}_2 \quad -C2D3\,\dot{q}_1]^T$$

$$^{3}\mathbf{V}_3 = {}^{3}\mathbf{A}_2\,{}^{2}\mathbf{V}_3 = [S3\,D3\,\dot{q}_2 \quad C3\,D3\,\dot{q}_2 \quad -C2D3\,\dot{q}_1]^T$$

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Lagrange

EXEMPLE ***Calcul des éléments de la matrice A. Supp***

$$^{j}\mathbf{MS}_j = [MX_j \quad MY_j \quad MZ_j]^T$$

$$^{j}\mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} XX_j & XY_j & XZ_j \\ XY_j & YY_j & YZ_j \\ XZ_j & YZ_j & ZZ_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_a = \begin{bmatrix} I_{a1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{a3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} = {} & Ia_1 + ZZ_1 + SS2\ XX_2 + 2CS2\ XY_2 + CC2\ YY_2 + SS23\ XX_3 + 2CS23 \\ & XY_3 + CC23\ YY_3 + 2C2\ C23\ D3\ MX_3 - 2C2\ S23\ D3\ MY_3 + \\ & CC2\ D_3^2\ M_3 \end{aligned}$$

$$A_{12} = S2\ XZ_2 + C2\ YZ_2 + S23\ XZ_3 + C23\ YZ_3 - S2\ D3\ MZ_3$$

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Lagrange

EXEMPLE *Calcul des éléments de la matrice A. Supp*

$$A_{11} = Ia_1 + ZZ_1 + SS2\ XX_2 + 2CS2\ XY_2 + CC2\ YY_2 + SS23\ XX_3 + 2CS23\ XY_3 + CC23\ YY_3 + 2C2\ C23\ D3\ MX_3 - 2C2\ S23\ D3\ MY_3 + CC2\ D_3^2\ M_3$$

$$A_{12} = S2\ XZ_2 + C2\ YZ_2 + S23\ XZ_3 + C23\ YZ_3 - S2\ D3\ MZ_3$$

$$A_{13} = S23\ XZ_3 + C23\ YZ_3$$

$$A_{22} = Ia_2 + ZZ_2 + ZZ_3 + 2C3\ D3\ MX_3 - 2S3\ D3\ MY_3 + D_3^2\ M_3$$

$$A_{23} = ZZ_3 + C3\ D3\ MX_3 - S3\ D3\ MY_3$$

$$A_{33} = Ia_3 + ZZ_3$$

$$\boxed{SSj = (\sin\theta_j)^2,\ CCj = (\cos\theta_j)^2 \text{ et } CSj = \cos\theta_j \sin\theta_j}$$

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Lagrange

EXEMPLE

$$U_j = -\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{g}^T & 0 \end{bmatrix} {}^0\mathbf{T}_j \begin{bmatrix} {}^j\mathbf{MS}_j \\ M_j \end{bmatrix}$$

$$U = -G3\,(MZ_1 + S2MX_2 + C2MY_2 + S23MX_3 + C23MY_3 + D3S2M_3)$$

Calcul du vetceur de gravité $G(q) = \dfrac{\partial U}{\partial q}$

$$\begin{aligned} G_1 &= 0 \\ G_2 &= -G3\,(C2\,MX_2 - S2\,MY_2 + C23\,MX_3 - S23\,MY_3 + D3\,C2\,M_3) \\ G_3 &= -G3\,(C23\,MX_3 - S23\,MY_3) \end{aligned}$$

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Newton Euler

Les équations de Newton Euler permettent de décrire le mouvement linéaire et angulaire de chaque corps, est fondé sur une double récurrence : une récurrence avant et une arrière

Résolution des équations de la récurrence avant

Les équations de Newton-Euler expriment le torseur dynamique en G_j des efforts extérieurs sur un corps j par les équations

$$\mathbf{F}_j = M_j \dot{\mathbf{V}}_{Gj}$$

$$\mathbf{M}_{Gj} = \mathbf{I}_{Gj} \dot{\omega}_j + \omega_j \times (\mathbf{I}_{Gj} \omega_j)$$

En transformant dans le repère Oj on obtient pour chaque corps j

$$\mathbf{F}_j = M_j \dot{\mathbf{V}}_j + \dot{\omega}_j \times \mathbf{MS}_j + \omega_j \times (\omega_j \times \mathbf{MS}_j)$$

$$\mathbf{M}_j = \mathbf{J}_j \dot{\omega}_j + \mathbf{MS}_j \times \dot{\mathbf{V}}_j + \omega_j \times (\mathbf{J}_j \omega_j)$$

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Newton Euler

Résolution des équations de la récurrence avant

Les équations de la récurrence avant (j=1:n) exprimées dans Oj sont

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{F}_j &= M_j\,\dot{\mathbf{V}}_j + \dot{\omega}_j \times \mathbf{MS}_j + \omega_j \times (\omega_j \times \mathbf{MS}_j) \\ \mathbf{M}_j &= \mathbf{J}_j\,\dot{\omega}_j + \mathbf{MS}_j \times \dot{\mathbf{V}}_j + \omega_j \times (\mathbf{J}_j\,\omega_j) \end{aligned}}$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{MS}_j \\ \mathbf{J}_j \\ M_j \end{array} \right.$ Constants et connues

Cette récurrence permet de calculer $\mathbf{F}_j$ et $\mathbf{M}_j$ *à partir de* ω_j, $\dot{\omega}_j$ *et* $\dot{\mathbf{V}}_j$

Pour ce faire, il faut calculer premièrement les vitesses de rotations et puis les vitesses de translation, par les formules :

$$\omega_j = \omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j\,\dot{q}_j\,\mathbf{a}_j$$

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_{j-1} + \omega_{j-1} \times \mathbf{L}_j + \sigma_j\,\dot{q}_j\,\mathbf{a}_j$$

Calculer De la même façon que l'exemple Vu la dernière séance

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Newton Euler

Résolution des équations de la récurrence avant

Une fois trouvées les vitesses articulaires ω_j, on calcule les accélérations articulaires et de translation par les formules

$$\dot{\omega}_j = \dot{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j (\ddot{q}_j \mathbf{a}_j + \omega_{j-1} \times \dot{q}_j \mathbf{a}_j)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_j = \dot{\mathbf{V}}_{j-1} + \dot{\omega}_{j-1} \times \mathbf{L}_j + \omega_{j-1} \times (\omega_{j-1} \times \mathbf{L}_j) + \sigma_j (\ddot{q}_j \mathbf{a}_j + 2\, \omega_{j-1} \times \dot{q}_j \mathbf{a}_j)$$

On peut finalement calculer **Fj** et **Mj** grâce aux relations

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{F}_j &= \mathrm{M}_j \dot{\mathbf{V}}_j + \dot{\omega}_j \times \mathbf{MS}_j + \omega_j \times (\omega_j \times \mathbf{MS}_j) \\ \mathbf{M}_j &= \mathbf{J}_j \dot{\omega}_j + \mathbf{MS}_j \times \dot{\mathbf{V}}_j + \omega_j \times (\mathbf{J}_j\, \omega_j) \end{aligned}}$$

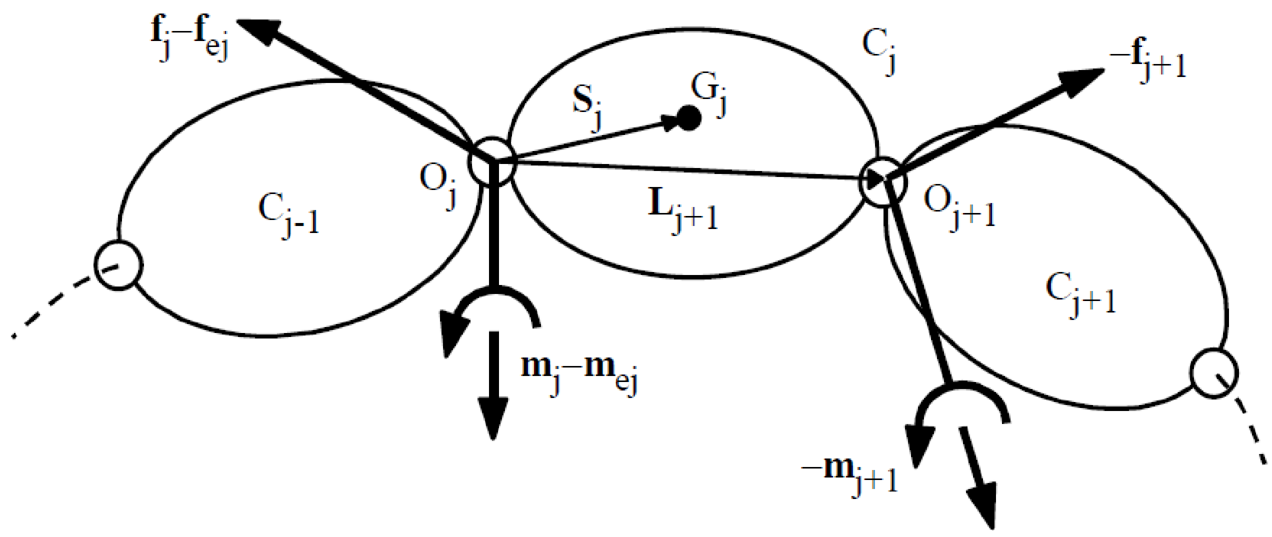
***La** base est fixe, donc on initialise cette récurrence par* $\omega_0 = 0,\ \dot{\omega}_0 = 0$ et $\dot{\mathbf{V}}_0 = 0$.

dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Newton Euler

Résolution des équations de la récurrence arrière



Bilan des efforts au centre de gravité

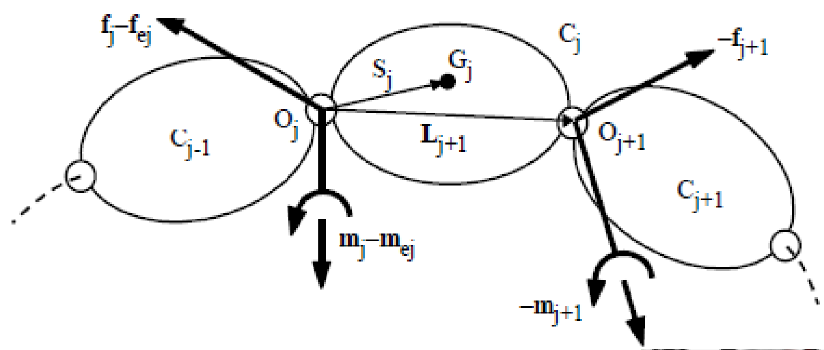
Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Newton Euler

Résolution des équations de la récurrence arrière

Récurrence arrière. Les équations composant la récurrence arrière 5 **(j=N:-1:1)** *sont* obtenues à partir du bilan des efforts sur chaque corps, écrit à l'origine Oj

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{f}_j - \mathbf{f}_{j+1} + M_j\,\mathbf{g} - \mathbf{f}_{ej}$$
$$\mathbf{M}_j = \mathbf{m}_j - \mathbf{m}_{j+1} - \mathbf{L}_{j+1} \times \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{S}_j \times M_j\,\mathbf{g} - \mathbf{m}_{ej}$$



dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Chapitre 4

Modèle Dynamique / Formalisme De Newton Euler

Résolution des équations de la récurrence arrière

Récurrence arrière. Les équations composant la récurrence arrière 5 **(j=N:-1:1)** *sont* obtenues à partir du bilan des efforts sur chaque corps, écrit à l'origine Oj

$$F_j = f_j - f_{j+1} + M_j\, g - \cancelto{0}{f_{ej}}$$

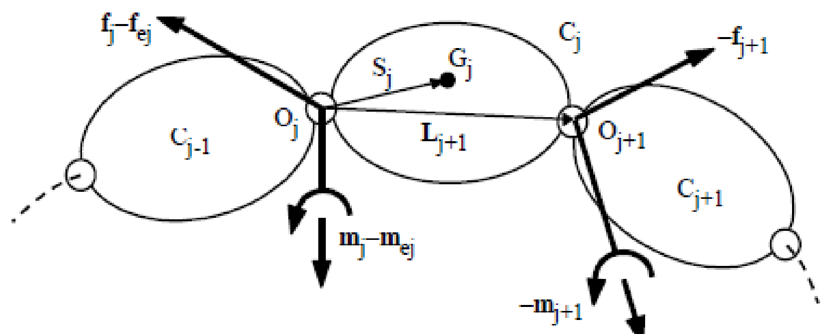
$$M_j = m_j - m_{j+1} - L_{j+1} \times f_{j+1} + S_j \times M_j\, g - \cancelto{0}{m_{ej}}$$

Donc

Connus et Calculés dans la récurrence avant

Les inconnus à calculer

Initialisés à 0,
le coprs n+1 n'existe pas



dalila.djoudi@univ-djelfa.dz

Résolution des équations de la récurrence arrière

Donc

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{F}_j + \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{f}_{ej}$$
$$\mathbf{m}_j = \mathbf{M}_j + \mathbf{m}_{j+1} + \mathbf{L}_{j+1} \times \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{m}_{ej}$$

Cette récurrence est initialisée par $\dot{\mathbf{V}}_0 = -\mathbf{g}$ $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{0}$.

On obtient alors les couples aux actionneurs Γ_j en projetant, suivant la nature de l'articulation j, les vecteurs **fj** ou **mj** sur l'axe du mouvement. On ajoute les termes correctifs représentant l'effet des frottements et des **inerties des actionneurs**, ce qui donne :

$$\boxed{\Gamma_j = (\sigma_j \mathbf{f}_j + \bar{\sigma}_j \mathbf{m}_j)^T \mathbf{a}_j + F_{sj}\,\mathrm{sign}(\dot{q}_j) + F_{vj}\,\dot{q}_j + Ia_j\,\ddot{q}_j}$$