Série d'exercices N1

Exercice(01)
En utilisant les connecteurs logiques et les quantificateurs, écrire les propositions suivantes et leur négation :
1. Pour tout $a \in]0, +\infty[$ l'équation $x^2 + ax + 1 = 0$ admet au moins une solution.
2. Il existe un réel e tel que pour tout x réel, on a $e + 2ex = 4x + 2$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 < 0$.
4. $a \in \mathbb{R}$ est une solution de $x^2 - x - 6 < 0$, alors $a \leq -2$ ou $a \geq 3$.
5. Toute solution de $x^2 + x + 1 = 0$, est une solution complexe.
6. Il est nécessaire que $z = \overline{z}$ pour que $z \in \mathbb{C}$.
7. Les graphes des fonctions f et g se coupent en un seul point sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
8. La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
9. La fonction f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.
10. f et g sont deux fonctions telles que f n'est pas inférieure à g, sur $[-1, 4]$.
11. f est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.
12. f est une fonction qui donne ses valeurs sur $[-1, 1]$. Donner un exemple.

Exercice (02)
Étudier la vérité des propositions suivantes :
1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x - y = 5$.
2. $\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : e + 2ex = 4x + 2$.
3. La valeur absolue de x est une racine carré de x^2.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, on a 4 divise n^2 ou divise $n^2 - 1$.
5. $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 : (\forall x / |x| < \alpha) \Longrightarrow |x^2| < \epsilon$.

Exercice (03)
Montrer que les propositions suivantes sont vraies :
1. $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$, on a $4xy - 6x + 12 \neq 3$.
2. soit $a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \mid a \mid \leq \epsilon \Longrightarrow a = 0$.
3. L'ensemble vide est une partie de tout ensemble.
4. Les nombres $\alpha_1 = (20 + 14\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ et $\alpha_2 = (20 - 14\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ sont irrationnels.
5. Le nombre $\alpha = (20 + 14\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} + (20 - 14\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ est un nombre entier. (utiliser $(a + b)^3$).
6. $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}$, on a $n^2 \leq 2^n \leq n!$ [1]
7. $x > 1 \Longrightarrow E(\frac{1}{x}) = 0$ [2]

1. Utiliser le fait que $2 < n \Longrightarrow 2n < n^2 \Longrightarrow 2n \Longrightarrow n^2 - 1$.
2. $E(x)$ représente la partie entiére de x.

8. $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 $\Longrightarrow n$ est pair.
9. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_0^n K^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, puis en déduire $\sum_0^n K^3$.