CHAPITRE IV

TRAVAIL ET ÉNERGIE

TRAVAIL ET ÉNERGIE

I. INTRODUCTION SUR LES INVARIANTS EN PHYSIQUE

En physique il existe plusieurs grandeurs qui sous certaines conditions restent constantes, on les appels des invariants.
Une de ces grandeurs est ce que nous appelons énergie d'une particule ou plus généralement énergie d'un système. Cette quantité est supposée toujours conservée, mais elle peut changer de forme. Les formes que peut prendre l'énergie sont variées et touchent différent domaines de la physique, en fait, c'est nous qui décidons de la forme d'énergie à étudier, qu'elle soit mécanique, électrique, thermique, rayonnante, chimique …

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons uniquement à la forme mécanique de l'énergie, si cette dernière reste constante (ne change pas de forme) nous dirons qu'elle est conservée, mais si elle se transforme (en énergie thermique par exemple) nous dirons qu'elle est non conservée.

II. TRAVAIL ET PUISSANCE

Nous avons l'habitude de définir le travail d'une force (parallèle au déplacement) lors d'un déplacement rectiligne d'un point matériel par le produit de la force F au déplacement AB.

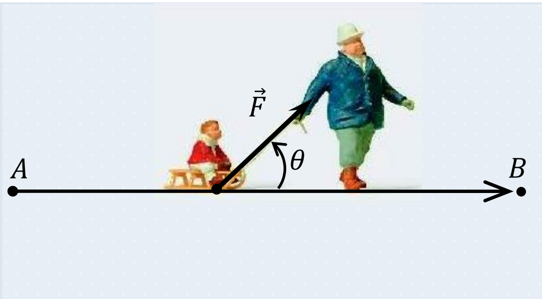
$$W_A^B = \pm F.(AB)$$

- Cette valeur est positive si la force est dans le sens du déplacement (force motrice).
- Elle est négative si la force est dans le sens opposé au déplacement (force résistante au déplacement).
- Le travail d'une force perpendiculaire au déplacement étant nul.

Plus généralement, lors d'un déplacement rectiligne, le travail est donné par :

$$W_A^B = \vec{F} \bullet \overrightarrow{AB} = F.AB.\cos\theta$$

Travail moteur	$W_A^B > 0$	$\cos\theta > 0$	$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$
Travail résistant	$W_A^B < 0$	$\cos\theta < 0$	$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$
Travail nul	$W_A^B = 0$	$\cos\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$

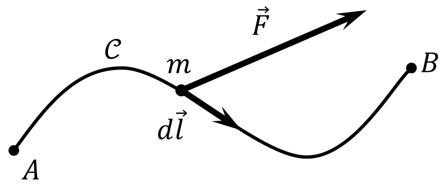


Lors du déplacement d'une masse ponctuelle m d'un point A vers un point B de l'espace, suivant une courbe quelconque $\mathcal{C}$. Le travail s'obtient en divisant la courbe en déplacements élémentaires $d\vec{l}$ pouvant être considérés comme rectilignes. Dans ce cas nous calculons le travail élémentaire de la force par :

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{l}$$

Le travail d'une force $\vec{F}$ (ou de la résultante des forces) lors du déplacement AB est alors calculé à partir de l'intégrale :

$$W_A^B = \int_A^B dW = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \bullet d\vec{l}$$



$d\vec{l}$ est un déplacement élémentaire suivant la courbe $\mathcal{C}$.

Cette intégrale est appelée « circulation du champ de force $\vec{F}$ sur la courbe $\mathcal{C}$ »

Remarque :

La force peut être décomposée $\vec{F}$ en deux vecteurs : $\vec{F}_{\parallel}$ parallèle au déplacement $d\vec{l}$, et $\vec{F}_{\perp}$ perpendiculaire au déplacement $d\vec{l}$.

$$W_A^B = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_{\mathcal{C}} \left(\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}\right) \bullet d\vec{l}$$

Comme $\vec{F}_{\perp} \bullet d\vec{l} = 0$, alors :

$$W_A^B = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_{\parallel} \bullet d\vec{l}$$

D'où seule la composante de la force parallèle au déplacement $\left(\vec{F}_{\parallel}\right)$ fournit un travail, le travail de la force perpendiculaire au déplacement étant nul.

Puissance :

La puissance moyenne est définie par la valeur du travail entre deux points, divisée par le temps mis pour le réaliser Δt.

$$P_{\text{moy}} = \frac{W_A^B}{\Delta t}$$

D'où la définition de la puissance instantanée :

$$P = P_{\text{inst}} = \frac{dW}{dt}$$

Unités :

	Travail $\left(W_A^B\right)$	Puissance (P)
Système $[\mathbf{MKSA}]$	Joule $(1\,Joule = 1\,N.m)$	Watt $(1\,Watt = 1\,Joule/s)$
Autres unités	Calorie $(1\,Cal = 4{,}1855\,Joule)$ Watt–heure $(1\,Wh = 3600\,Joule)$ KiloWatt–heure $(1\,kWh = 3{,}6 \times 10^6\,Joule)$	Cheval–vapeur $(1\,Cv = 736\,Watt)$

III. ÉNERGIE CINÉTIQUE

Calculons le travail de la résultante des forces $\vec{F}$ appliquée à un point matériel de masse m entre deux points A et B.

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l}$$

Or d'après le principe fondamental de la dynamique nous avons :

$$\vec{F} = m.\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

D'où

$$W_A^B = \int_A^B \left(m\frac{d\vec{V}}{dt}\right) \bullet d\vec{l} = m\int_A^B d\vec{V} \bullet \vec{V} \qquad \text{avec} \qquad \vec{V} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

Mais puisque le déplacement est assez petit pour le considérer comme étant rectiligne, donc les vecteurs et sont parallèles. Le travail devient alors :

$$W_A^B = m\int_A^B dV.V = \left[\frac{1}{2}m.V^2\right]_A^B$$

Attention : dV est une valeur algébrique elle est négative si le module de la vitesse diminue.

$$E_c = \frac{1}{2}m.V^2$$

Est appelée « ***énergie cinétique*** » du point matériel.

D'où l'énoncé du ***théorème de l'énergie cinétique*** : « Le travail de la résultante des forces appliquée à un point matériel entre deux point est égal à la variation de l'énergie cinétique du point matériel »

$$W_A^B(\vec{F}_{\text{résultante}}) = \Delta E_c = \frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2$$

Remarque :

L'énergie cinétique d'un solide indéformable en mouvement est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}m.V^2 + \frac{1}{2}I.\omega^2$$

V est le module de la vitesse de translation du centre de masse.

ω est la vitesse de rotation du solide autour d'un axe de symétrie passant par son centre de masse.

I est le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe (Voir chapitre Dynamique).

IV. ÉNERGIE POTENTIELLE

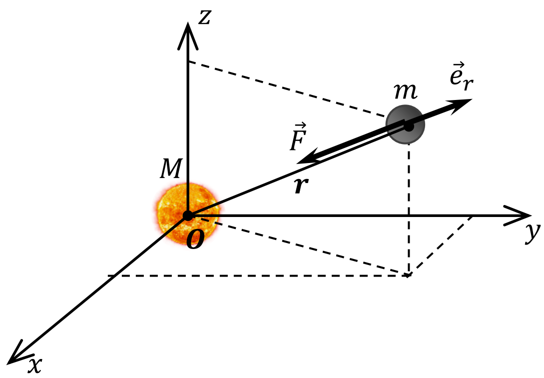
Nous avons vu précédemment que quand on remplace la résultante des forces par $(m.\vec{a})$ dans l'intégrale donnant le travail, on obtient l'expression de l'énergie cinétique. Maintenant si nous utilisons dans l'intégrale la loi empirique connue pour chaque force (voir chapitre Dynamique : Lois de forces) nous obtiendrons l'expression de l'énergie potentielle correspondant à chaque loi de force.

Cependant, il faut écarter la force de contact $\vec{C}$ qui est toujours perpendiculaire au déplacement, d'où le travail de cette dernière est nul.

Le cas des forces de frottements sera traité à part dans la partie réservée aux forces non conservatives.

ÉNERGIE POTENTIELLE GRAVITATIONNELLE

Soit deux corps de masses respectives notées m et M, séparés d'une distance r (exemple : une planète et son satellite). Si on se place dans le référentiel lié à la masse M, on considère alors que celle-ci est fixe et que la masse m est en mouvement.



La force d'attraction appliquée par M sur m est donné par :

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$$

$\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire dans la direction de r et dirigé de M vers m.
Comme la masse M est fixée à l'origine O alors $\vec{u}_r = \vec{e}_r$ (coordonnées sphériques).

Remplaçons la loi de force dans l'intégrale donnant le travail :

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_A^B \left(-G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r\right) \bullet d\vec{l}$$

En coordonnées sphériques $d\vec{l} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta\,.d\varphi.\vec{e}_\varphi$. D'où :

$$W_A^B = \int_A^B \left(-G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r\right) \bullet \left(dr.\vec{e}_r + rd\theta.\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi.\vec{e}_\varphi\right) = \int_A^B -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

En intégrant, nous trouvons :

$$W_A^B = \left[G\frac{Mm}{r}\right]_A^B = G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A}$$

En comparant cette expression avec l'expression donnant l'énergie cinétique, nous trouvons :

$$W_A^B = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A}$$

Et donc

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - G\frac{Mm}{r_B} = \frac{1}{2}mV_A^2 - G\frac{Mm}{r_A}$$

Cette valeur étant la même en A et en B quelque soit les deux point A et B. En d'autre termes la valeur $\left(\frac{1}{2}mV^2 - G\,Mm/r\right)$ est la même quelque soit le point où nous la calculons. Donc :

$$\frac{1}{2}mV^2 - G\frac{Mm}{r} = \text{constante}$$

Cette quantité est une énergie, elle est toujours constante (tant qu'il n'y a pas d'autres forces entre les deux masses). On appelle cette énergie « ***énergie mécanique totale*** » et on dit qu'elle est conservée.

Identifions maintenant les différents termes :

$E_T = E_c + E_p = \text{Constante}$	
$E_c = \frac{1}{2}mV^2$	énergie cinétique
$E_p = -G\frac{Mm}{r}$	énergie potentielle gravitationnelle
$E_T = \frac{1}{2}mV^2 - G\frac{Mm}{r}$	énergie mécanique totale

Et le travail

$$W_A^B = \Delta E_c = -\Delta E_p$$

Remarque importante :

En fait avec l'intégrale limitée $W_A^B = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l}$ nous avons calculé la variation de l'énergie potentielle entre les point A et B.

En calculant l'intégrale non limitée on trouve une constante d'intégration

$$dW = -dE_p$$

$$\int \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int -G\frac{Mm}{r^2}dr = +G\frac{Mm}{r} + C = -E_p(r)$$

La constante C est calculée à partir de la connaissance de l'énergie potentielle en un point r. En général, on choisit l'énergie potentielle gravitationnelle nulle à l'infini $E_p(r \to +\infty) = 0$. En remplaçant :

$$0 = +G\frac{Mm}{+\infty} + C \qquad \Rightarrow \qquad C = 0$$

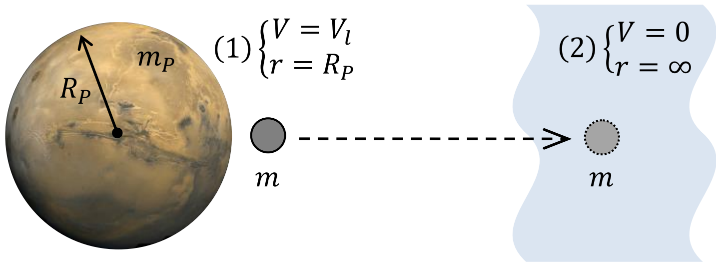
Et

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

On appelle $(r = +\infty)$ « Origine des énergie potentielles ».

Exemple : *Vitesse de libération*.

V_l est la vitesse minimale qu'il faut donner à un corps pour le libérer de l'attraction gravitationnelle d'une planète : c'est-à-dire pour qu'il puisse atteindre l'infini avec une vitesse nulle.



Si on donne au corps une vitesse inférieure à V_l, il ne pourra pas atteindre l'infini et restera toujours dans la zone d'attraction de la planète.
Si on donne au corps une vitesse supérieure à V_l, il atteindra l'infini avec un excédent d'énergie (de vitesse).

Au voisinage de la surface de la planète (point (1)) :

$$\begin{cases}V = V_l\\ r = R_P\end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_T(1) = E_c(1) + E_p(1) = \frac{1}{2}mV_l^2 - G\frac{m_P m}{R_P}$$

A l'infini (point (2)) :

$$\begin{cases}V = 0\\ r = \infty\end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_T(2) = E_c(2) + E_p(2) = \frac{1}{2}m.0^2 - G\frac{m_P m}{\infty} = 0$$

La conservation de l'énergie mécanique totale s'écrit :

$$E_T(1) = E_T(2)$$

Où

$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

D'où

$$\frac{1}{2}mV_l^2 - G\frac{m_P.m}{R_P} = 0 \qquad \text{et} \qquad V_l = \left(2G\frac{m_P}{R_P}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dans le cas de la Terre ($m_T = 5{,}9742 \times 10^{24}\ kg$; $R_T = 6{,}371 \times 10^{6}\ m$)

$$V_l = 11{,}18 \times 10^3 \quad m/s$$

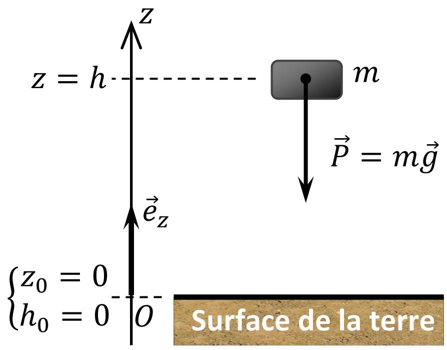
Remarque :

Nous avons dit précédemment que

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

Est l'énergie potentielle de la masse m. Ceci est du au fait que nous nous sommes placés dans le référentiel lié à la masse M et que cette dernière est considérée comme fixe. Dans ce cas, toute l'énergie potentielle transférée au système sous forme d'énergie cinétique (l'énergie mécanique totale étant constante) sert à augmenter ou à diminuer la vitesse de la masse m uniquement.
Si nous nous plaçons dans un repère qui n'est pas lié aux deux masses. On verra que l'attraction entre les masses est mutuelle (principe de l'action et de la réaction), ainsi l'énergie potentielle précédente est l'énergie potentielle du système constitué des deux masses (M, m). L'énergie totale est toujours conservée, donc, l'énergie potentielle est transférée au système sous forme d'énergie cinétique des deux masses.

CAS AU VOISINAGE DE LA TERRE



Soit une masse m au voisinage de la surface de la terre. On considérera que la seule force agissant sur la masse m est la force d'attraction gravitationnelle terrestre.

$$\vec{F} = \vec{P} = m.\vec{g}$$

Notons l'axe vertical (Oz) dirigé vers le haut suivant le vecteur unitaire $\vec{e}_z$. Dans ce cas :

$$\vec{P} = -mg.\vec{e}_z$$

Remplaçons la loi de force dans l'intégrale donnant le travail :

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_A^B (-mg.\vec{e}_z) \bullet d\vec{l}$$

En coordonnées cartésiennes $d\vec{l} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$. D'où :

$$W_A^B = \int_A^B (-mg.\vec{e}_z) \bullet \left(dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z\right) = \int_A^B -mg.dz$$

En intégrant, nous trouvons :

$$W_A^B = [-mgz]_A^B = -mgz_B + mgz_A$$

En comparant cette expression avec l'expression donnant l'énergie cinétique, nous trouvons :

$$W_A^B = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = -mgz_B + mgz_A$$

Et donc

$$\frac{1}{2}mV_B^2 + mgz_B = \frac{1}{2}mV_A^2 + mgz_A$$

Cette valeur étant la même en A et en B quelque soit les deux point A et B. En d'autre termes la valeur $\left(\frac{1}{2}mV^2 + mgz\right)$ est la même quelque soit le point où nous la calculons. Donc :

$$\frac{1}{2}mV^2 + mgz = \text{constante}$$

Cette quantité est une énergie, elle est toujours constante (tant qu'il n'y a pas d'autres forces entre les deux masses). On appelle cette énergie « Energie mécanique totale » et on dit qu'elle est conservée.

Identifions les différents termes :

$E_T = E_c + E_p = \text{Constante}$	
$E_c = \frac{1}{2}mV^2$	énergie cinétique
$E_p = mgz$	énergie potentielle gravitationnelle
$E_T = \frac{1}{2}mV^2 + mgz$	énergie mécanique totale

Et le travail

$$W_A^B = \Delta E_c = -\Delta E_p$$

Remarque importante :

Comme précédemment, l'intégrale limitée $W_A^B = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l}$ que nous avons calculé donne la variation de l'énergie potentielle entre les point A et B.

En calculant l'intégrale non limitée on trouve une constante d'intégration

$$dW = -dE_p$$

$$\int \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int -m.g.dz = -m.g.z + C = -E_p(z)$$

La constante C est calculée à partir de la connaissance de l'énergie potentielle en un point z. En général, on choisit comme « Origine des énergie potentielles » $E_p = 0$ la surface de la terre, dans ce cas la position z est identifiée à la hauteur $z = h$ et à la surface de terre $z_0 = h_0 = 0$. En remplaçant :

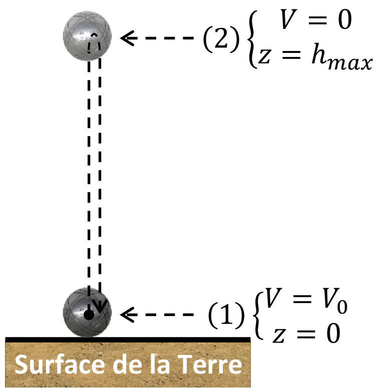
$$0 = -m.g.0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Et

$$E_p = mgh$$

Exemple : *Projectile vertical.*

On lance verticalement vers le haut une masse m.



A la surface de la terre (point (1)) :

$$V = V_0 \quad ; \quad z = h = 0$$

$$E_T(1) = E_c(1) + E_p(1) = \frac{1}{2}m.V_0^2 + m.g.0$$

Hauteur maximale (point (2)) :

$$V = 0 \quad ; \quad z = h = h_{max}$$

$$E_T(2) = E_c(2) + E_p(2) = \frac{1}{2}m.0^2 + m.g.h_{max}$$

Conservation de l'énergie mécanique totale :

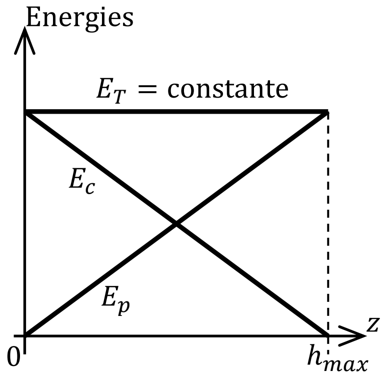
$$E_T(1) = E_T(2)$$

Où

$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

D'où

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = mgh_{max} \quad \text{et} \quad h_{max} = \frac{V_0^2}{2g}$$



Le diagramme ci-contre peut être lu dans les deux sens :

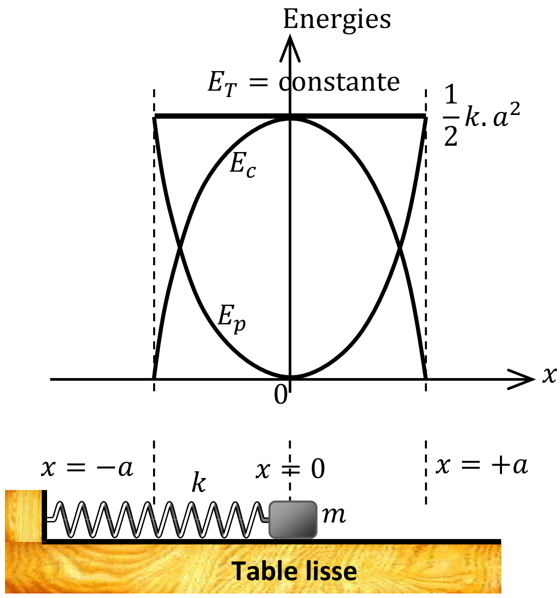
A la montée : $(z = 0 \to h_{max})$ augmente ; $\left(E_c = \frac{1}{2}m.V_0^2 \to 0\right)$ diminue ;

$(E_p = 0 \to mgh_{max})$ augmente ; $(E_T = \text{Constante})$.

A la décente : $(z = h_{max} \to 0)$ diminue ; $\left(E_c = 0 \to \frac{1}{2}mV_0^2\right)$ augmente ;

$(E_p = mgh_{max} \to 0)$ diminue ; $(E_T = \text{Constante})$.

ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLASTIQUE



Soit une masse m reliée au bout d'un ressort de constante de raideur k et dont l'autre bout est fixe. On considérera que la seule force agissant sur la masse m est la force élastique.

$$\vec{F}_{\text{élast}} = -k.\vec{x}$$

Tel que (Ox) est l'axe horizontal dirigé vers le haut suivant le vecteur unitaire $\vec{e}_x$. $\vec{x}(t)$ est la position de la masse m par rapport à l'équilibre. Dans ce cas :

$$\vec{F}_{\text{élast}} = -k.x.\vec{e}_x$$

Remplaçons la loi de force dans l'intégrale donnant le travail :

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_A^B (-k.x.\vec{e}_x) \bullet d\vec{l}$$

En coordonnées cartésiennes $d\vec{l} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$. D'où :

$$W_A^B = \int_A^B (-k.x.\vec{e}_x) \bullet \left(dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z\right) = \int_A^B -k.x.dx$$

En intégrant, nous trouvons :

$$W_A^B = \left[-\frac{1}{2}k.x^2\right]_A^B = -\frac{1}{2}k.x_B^2 + \frac{1}{2}k.x_A^2$$

En comparant cette expression avec l'expression donnant l'énergie cinétique, nous trouvons :

$$W_A^B = \frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = -\frac{1}{2}k.x_B^2 + \frac{1}{2}k.x_A^2$$

Et donc

$$\frac{1}{2}m.V_B^2 + \frac{1}{2}k.x_B^2 = \frac{1}{2}m.V_A^2 + \frac{1}{2}k.x_A^2$$

Cette valeur étant la même en A et en B quelque soit les deux point A et B. En d'autre termes la valeur $\left(\frac{1}{2}m.V^2 + \frac{1}{2}k.x^2\right)$ est la même quelque soit le point où nous la calculons. Donc :

$$\frac{1}{2}m.V^2 + \frac{1}{2}k.x^2 = \text{Constante}$$

Cette quantité est une énergie, elle est toujours constante (tant qu'il n'y a pas d'autres forces entre les deux masses). On appelle cette énergie « Energie mécanique totale » et on dit qu'elle est conservée.

Identifions les différents termes :

$E_T = E_c + E_p = \text{Constante}$	
$E_c = \frac{1}{2}mV^2$	énergie cinétique
$E_p = \frac{1}{2}k.x^2$	énergie potentielle gravitationnelle
$E_T = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}k.x^2$	énergie mécanique totale

Et le travail

$$W_A^B = \Delta E_c = -\Delta E_p$$

Remarque importante :
Comme précédemment, l'intégrale limitée $W_A^B = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l}$ que nous avons calculé donne la variation de l'énergie potentielle entre les point A et B.

En calculant l'intégrale non limitée on trouve une constante d'intégration

$$dW = -dE_p$$

$$\int \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int -k.x.dx = -\frac{1}{2}k.x^2 + C = -E_p(x)$$

La constante C est calculée à partir de la connaissance de l'énergie potentielle en un point x. En général, on choisit comme « Origine des énergie potentielles » $E_p = 0$ la position d'équilibre $x = 0$. En remplaçant :

$$0 = -\frac{1}{2}k.0^2 + C \qquad \Rightarrow \qquad C = 0$$

Et

$$E_p = \frac{1}{2}k.x^2$$

FORCES DÉRIVANTS D'UN POTENTIEL

Dans les deux cas précédents (force gravitationnelle et force élastique) nous avons vu qu'il existait une certaine grandeur constante que nous avons appelé énergie mécanique totale et nous avons dit que cette grandeur est conservée.

$$E_T = E_c + E_p = \text{Constante}$$

D'autre part en se basant sur le théorème de la variation de l'énergie cinétique

$$W_A^B = \Delta E_c = -\Delta E_p$$

Et pour un travail infinitésimal

$$dW = dE_c = -dE_p$$

Ou encore

$$dE_p = -\vec{F} \bullet d\vec{l} \qquad (1)$$

dE_p est une variation infinitésimale de l'énergie potentielle. En mathématiques nous l'appelons *différentielle totale*. Cette variation peut être écrite en fonction des variables agissant sur E_p. Comme E_p est fonction d'une position dans l'espace, en coordonnées cartésienne c'est une fonction à trois variables.

$$E_p = E_p(x, y, z)$$

La variation (différentielle totale) de E_p peut être décomposée en trois variations suivants les trois variables qui la définissent :

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

D'autre part, la force $\vec{F}$ peut être écrite en fonction de ces trois composantes :

$$\vec{F} = F_x.\vec{e}_x + F_y.\vec{e}_y + F_z.\vec{e}_z$$

Et le déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$

En remplaçant dans l'équation (1) :

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz = -\left(F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz\right)$$

Et par identification

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \quad ; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

En remplaçant dans le vecteur force

$$\vec{F} = F_x.\vec{e}_x + F_y.\vec{e}_y + F_z.\vec{e}_z = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

Finalement

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

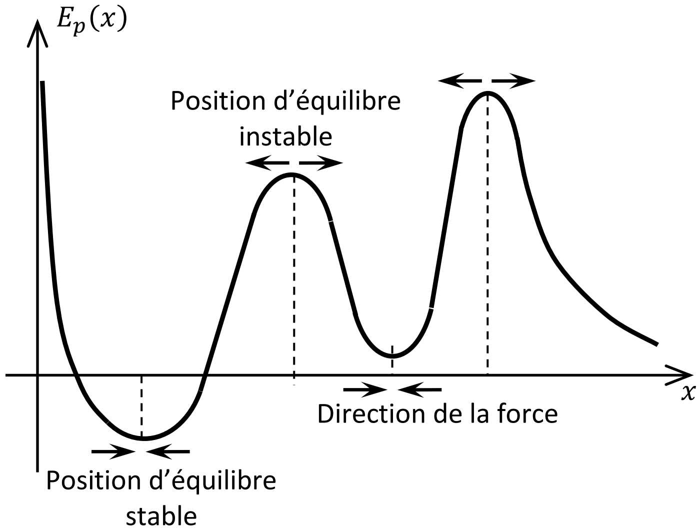
Les forces obéissant à cette loi sont dites « ***forces dérivant d'un potentiel*** ».

Si un corps ne subit que des forces dérivant d'un potentiel son énergie mécanique totale reste constante $(E_T = \text{constante})$, ces forces sont aussi, pour cette raison, appelées « ***forces conservatives*** ».

V. DISCUSSION DES COURBES D'ÉNERGIE POTENTIELLE

Considérons le problème à une dimension, suivant l'axe (Ox). On peut représenter $E_p(x)$ comme le montre le diagramme ci-dessous.

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p \quad \Rightarrow \quad F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$



Positions d'équilibre :

Les positions d'équilibre sont données par :

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0$$

Ces points sont donnés par les minimas et les maximas de la courbe $E_p(x)$.

Au voisinage de ces points le sens de la force est donné par le signe opposé du signe de la pente à la courbe.

Minimas	$\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$	Points d'équilibre stable, la force tend à ramener le mobile vers la position d'équilibre.
Maximas	$\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$	Points d'équilibre instable, la force tend à éloigner le mobile de la position d'équilibre.

Zones permises et zones interdites :

L'énergie totale étant conservée $(E_T = \text{constante})$ nous avons représenté différents cas de figure par des traits horizontaux.

L'énergie totale doit être toujours supérieure à l'énergie potentielle. En effet :

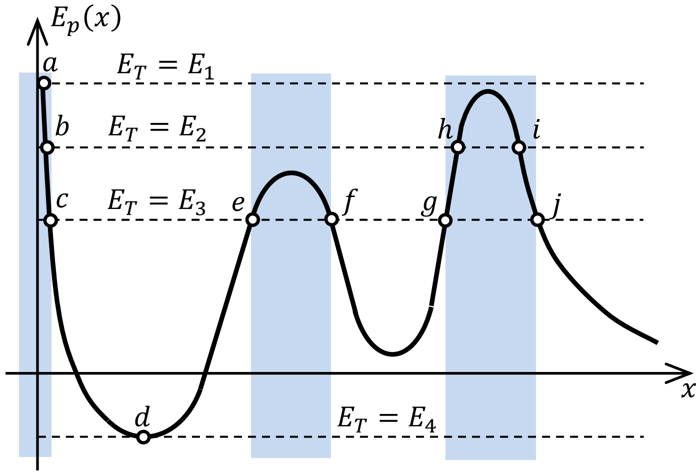
$$E_T = E_c + E_p \quad \Rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}m.V^2 = E_T - E_p \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_T \geq E_p}$$

1^er^ Cas $(\boldsymbol{E_T = E_1})$ **:** Le mobile peut se déplacer du point a jusqu'à $+\infty$.

2^ème^ Cas $(\boldsymbol{E_T = E_2})$ **:** Le mobile peut se déplacer entre les points b et h et du point i jusqu'à $+\infty$.

3^ème^ Cas $(\boldsymbol{E_T = E_3})$: Les zones permises au mobile sont $[c,e]$, $[f,g]$ et $[j,+\infty[$.
Les zones non permises (interdites) au mobile sont $]-\infty,c]$, $[e,f]$ et $[g,i]$ (en bleu sur la figure ci-contre)

4^ème^ Cas $(\boldsymbol{E_T = E_4})$: Le mobile ne peut se trouver qu'au point d. Dans ce cas il reste immobile.



Cependant l'étude de la courbe ne nous permet pas de connaitre dans quelle sens se déplace le mobile qui se trouve en un point x donné.
Par exemple, pour $E_T = E_3$, on sait qu'il peut se déplacer entre C et E mais on ne sait pas s'il va de C vers E ou au contraire il va de E vers C. Dans le cas général, le mobile va effectuer un mouvement de va et vient entre C et E.

Remarque

Si la courbe $E_p(x)$ au voisinage d'un minimum $\left(x_m, E_{pm}\right)$ peut être approximée à un arc de parabole, l'énergie potentielle s'écrira sous la forme :

$$E_p = A.(x - x_m)^2 + E_{pm}$$

Et le mouvement peut être considéré comme sinusoïdal.

VI. CAS DES FORCES NON CONSERVATIVES

Dans ce qui précède nous avons pris en compte uniquement les forces dérivant d'un potentiel ou forces conservatives. Si un corps est soumis uniquement à des forces de ce type sont énergie mécanique totale reste constante. Mais dans certains cas un autre type de force peut intervenir, des forces qui ne conservent pas l'énergie mécanique totale.

C'est le cas des forces de frottements, par exemple, si nous poussons un corps posé sur une table horizontale il va se déplacer d'une certaine distance puis s'arrêter sous l'action des forces de frottement. A l'instant où nous lui avons communiqué une vitesse initiale V_0 il avait une énergie mécanique totale $E_T(1) = E_c(1) + E_p(1) = \frac{1}{2}mV_0^2 + mgh$ (h est la hauteur de la table par rapport à l'origine des énergies potentielles). Mais quand il s'est arrêté son énergie totale est devenue $E_T(2) = E_c(2) + E_p(2) = mgh$, donc elle a changée.
Les forces qui induisent un changement dans l'énergie mécanique totale, sont appelées « forces non conservatives ».

Calculons le travail des forces non conservatives. On sait que le travail de la résultante des forces est égal à ΔE_c.

$$W_A^B(\vec{F}) = \Delta E_c$$

On va écrire la résultante des forces sous la forme d'une somme de forces conservative $\vec{F}_{\text{cv}}$ et de forces non conservatives $\vec{F}_{\text{ncv}}$.

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{cv}} + \vec{F}_{\text{ncv}}$$

Le travail lui-même peut s'écrire sous la forme d'une somme :

$$W_A^B(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_A^B \left(\vec{F}_{\text{cv}} + \vec{F}_{\text{ncv}}\right) \bullet d\vec{l} = \int_A^B \vec{F}_{\text{cv}} \bullet d\vec{l} + \int_A^B \vec{F}_{\text{cv}} \bullet d\vec{l}$$

Donc

$$W_A^B(\vec{F}) = W_A^B\left(\vec{F}_{\text{cv}}\right) + W_A^B\left(\vec{F}_{\text{ncv}}\right) = \Delta E_c$$

Or, le travail des forces conservatives est égal à $\left(-\Delta E_p\right)$.

$$W_A^B\left(\vec{F}_{\text{cv}}\right) = -\Delta E_p$$

En remplaçant

$$-\Delta E_p + W_A^B\left(\vec{F}_{\text{ncv}}\right) = \Delta E_c$$

Finalement, ***le travail des forces non conservatives est égal à la variation de l'énergie mécanique totale***.

$$W_A^B(\vec{F}_{\text{ncv}}) = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_T$$

Pour un déplacement infinitésimal :

$$dW(\vec{F}_{\text{ncv}}) = dE_c + dE_p = dE_T$$

COMMENT SAVOIR SI UNE FORCE EST CONSERVATIVE OU PAS ?

On sait que les forces gravitationnelles, les forces élastiques et aussi les forces électromagnétiques sont conservatives. On sait aussi que les différentes formes des forces de frottements sont non conservatives.

Une force conservative est une force qui dérive d'un potentiel, c'est-à-dire :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

Donc

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = -\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\, E_p) = \vec{0}$$

D'où, la règle générale suivante :

$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$	la force est conservative.
$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) \neq \vec{0}$	la force n'est pas conservative.