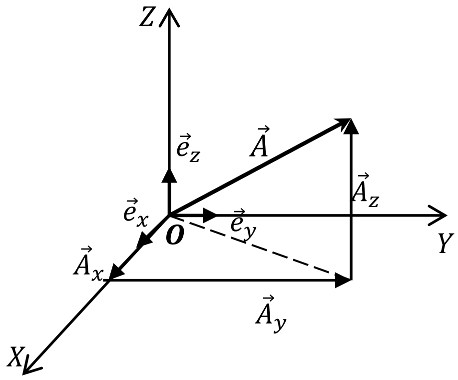
RÉSUMÉ DU COURS

ALGÈBRE VECTORIEL

Les ***composantes*** d'un vecteur dans un repère orthonormé cartésien : $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$

Le module : $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$



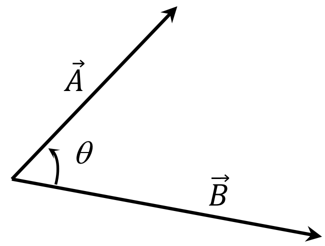
La ***somme*** vectorielle : $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \\ C_z = A_z + B_z \end{cases}$

La ***multiplication par un scalaire*** : $\vec{A}' = p.\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A'_x = p.A_x \\ A'_y = p.A_y \\ A'_z = p.A_z \end{cases}$

Vecteur unitaire dans la direction de $\vec{A}$:

$$\vec{A} = A.\vec{e}_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{A}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e_{Ax} = A_x/A \\ e_{Ay} = A_y/A \\ e_{Az} = A_z/A \end{cases}$$

PRODUIT SCALAIRE



$\boxed{\vec{A} \bullet \vec{B} = A.B.\cos(\theta)}$ avec $0 \le \theta \le \pi$

$\boxed{\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z}$

Propriétés :

- $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$
- Si $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$ alors $\vec{A} \perp \vec{B}$
- $\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \vec{C}$
- $\vec{A} \bullet \vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

PRODUIT VECTORIEL

$$\boxed{\text{Propriétés de } \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \begin{cases} \text{Module : } C = A.B.\sin(\theta) \\ \text{Direction : } \perp \ \ au\ plan\ (\vec{A}, \vec{B}) \\ \text{Sens : Règle de la Main droite} \end{cases}} \qquad \boxed{\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}}$$

Propriétés :

- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- Si $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ alors $\vec{A} \parallel \vec{B}$
- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
- $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$ toujours.
- $|\vec{A} \times \vec{B}|$ est égal à la surface du parallélogramme de coté $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

PRODUIT MIXTE

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

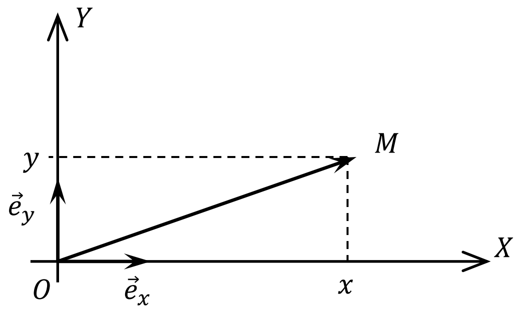
Propriété : $\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet (\vec{C} \times \vec{A})$

DOUBLE PRODUIT VECTORIEL

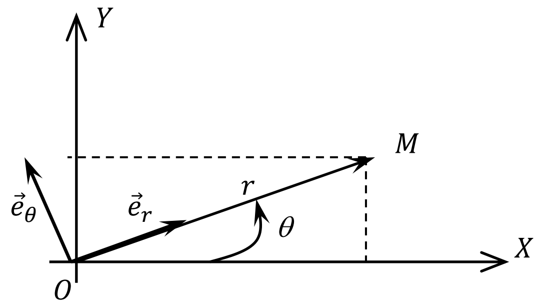
$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}.(\vec{A} \bullet \vec{C}) - \vec{C}.(\vec{A} \bullet \vec{B})$ (<u>*Attention*</u> : En général $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$)

SYSTEMES DE COORDONNEES

DANS LE PLAN



Coordonnées Cartésiennes



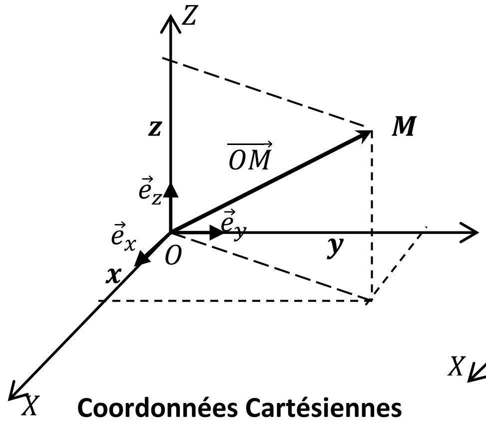
Coordonnées Polaires

Vecteur position :

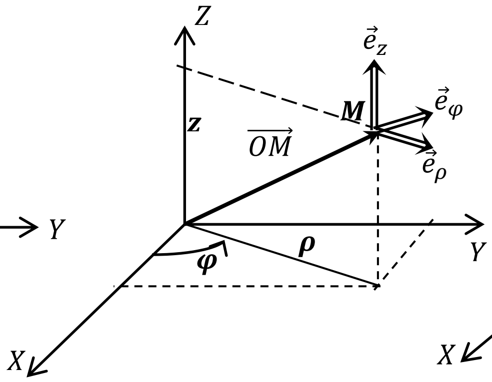
$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y \qquad \overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$$

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\,.\vec{e}_x + \sin\theta\,.\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,.\vec{e}_x + \cos\theta\,.\vec{e}_y \end{cases}$$

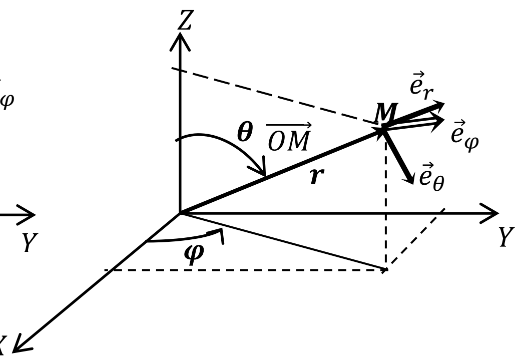
DANS L'ESPACE



Coordonnées Cartésiennes



Coordonnées Cylindriques



Coordonnées Sphériques

Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z \qquad \overrightarrow{OM} = \rho.\vec{e}_\rho + z.\vec{e}_z \qquad \overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$$

$$\begin{cases} x = \rho.\cos\varphi \\ y = \rho.\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r.\sin\theta\,.\cos\varphi \\ y = r.\sin\theta\,.\sin\varphi \\ z = r.\cos\theta \end{cases}$$

DÉRIVÉES ET INTÉGRALES DE VECTEURS

$\vec{A}(t) = A_x(t).\vec{e}_x + A_y(t).\vec{e}_y + A_z(t).\vec{e}_z$ est une fonction vectorielle de variable scalaire t.

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA_x(t)}{dt}\vec{e}_x + \frac{dA_y(t)}{dt}\vec{e}_y + \frac{dA_z(t)}{dt}\vec{e}_z$$

$$\frac{d^2\vec{A}(t)}{dt^2} = \frac{d^2A_x(t)}{dt^2}\vec{e}_x + \frac{d^2A_y(t)}{dt^2}\vec{e}_y + \frac{d^2A_z(t)}{dt^2}\vec{e}_z$$

Et l'intégrale

$$\int \vec{A}(t).dt = \left\{\int A_x(t).dt\right\}.\vec{e}_x + \left\{\int A_y(t).dt\right\}.\vec{e}_y + \left\{\int A_z(t).dt\right\}.\vec{e}_z$$

GRADIENT, DIVERGENCE ET ROTATIONNEL

$\vec{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z).\vec{e}_x + A_y(x,y,z).\vec{e}_y + A_z(x,y,z).\vec{e}_z$ est une fonction vectorielle à trois variables scalaires (x,y,z). $f(x,y,z)$ est une fonction scalaire à trois variables scalaires (x,y,z).

L'opérateur nabla est défini par :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z}$$

Le gradient :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}.f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z}$$

La divergence :

$$\boxed{div(\vec{A}) = \vec{\nabla}\bullet\vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

Le rotationnel :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}}$$

SÉRIE DE TD N° 01

EXERCICE 01 (*):

1. Montrez que le module A du vecteur $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$ est : $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$
2. Déterminez le vecteur d'origine $P(p_x, p_y, p_z)$ et d'extrémité $Q(q_x, q_y, q_z)$, et trouvez son module.

EXERCICE 02 :

1. Calculer graphiquement, puis en utilisant les composantes, la résultante de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ayant le même module $(A = B = 10)$ et dont les angles respectifs avec l'axe (OX) sont $(\vec{A}, \vec{e}_x) = \alpha = \pi/6$ et $(\vec{B}, \vec{e}_x) = -\alpha = -\pi/6$.

2. Montrer (graphiquement et analytiquement) que la somme des vecteurs de force suivant est nulle.

$\vec{F}_1 \begin{cases} \text{Module} & |\vec{F}_1| = 5\ N \\ \text{Angle} & (\vec{F}_1, \vec{e}_x) = 0 \end{cases}$; $\vec{F}_2 \begin{cases} \text{Module} & |\vec{F}_2| = 5\ N \\ \text{Angle} & (\vec{F}_2, \vec{e}_x) = \pi/2 \end{cases}$; $\vec{F}_3 \begin{cases} \text{Module} & |\vec{F}_3| = 5\sqrt{2}\ N \\ \text{Angle} & (\vec{F}_3, \vec{e}_x) = 5\pi/4 \end{cases}$

EXERCICE 03 :

Trouver, graphiquement et analytiquement, la somme ou la résultante des déplacements suivants :
$\vec{A}$: 10 m nord-ouest ; $\vec{B}$: 20 m 30° vers le nord-est ; $\vec{C}$: 35 m plein sud.

EXERCICE 04 :

1. Rappeler la définition du produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
2. On a $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$ donner l'expression du produit scalaire $\vec{A} \bullet \vec{B}$ en coordonnées cartésiennes.
3. Soit les deux vecteurs suivants : $\vec{A} = 2.\vec{e}_x + \vec{e}_y + 2.\vec{e}_z$ et $\vec{B} = \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z$. Calculer $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$, $\vec{A} \bullet \vec{B}$, et $\cos(\vec{A}, \vec{B})$.
4. On donne : $\vec{A} = 2.\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$ et $\vec{B} = 2.\vec{e}_x + 10.\vec{e}_y - 11.\vec{e}_z$.
   a. Trouver l'angle aigu formé par les deux vecteurs.
   b. Trouver le module de la résultante $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.
   c. Trouver l'angle que fait cette résultante avec les axes OX, OY et OZ.

EXERCICE 05 (*):

Soit les vecteurs $\vec{A}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{B}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$, $\vec{C}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{D}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{E}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

- Trouvez les paires de vecteurs perpendiculaires deux à deux ?

EXERCICE 06 (*):

a. Trouvez l'angle aigu formé par les diagonales d'un quadrilatère de sommets (0,0,0), (3,2,0), (4,6,0), (1,3,0).
b. Trouvez les angles (α, β, γ) que forme le vecteur $\vec{u} = \vec{e}_x + 2.\vec{e}_y + 3.\vec{e}_z$ respectivement avec les axes (OX, OY, OZ).

EXERCICE 07 (*):

Soit les vecteurs $\vec{A}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{B}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{C}\begin{pmatrix}2\\\alpha\\4\end{pmatrix}$

1. Calculez $\left|(\vec{A}+\vec{B})\bullet(\vec{A}-\vec{B})\right|$.
2. Trouvez α pour que $\vec{A}$ et $\vec{C}$ soient perpendiculaires.
3. Peut-on trouver une valeur de α pour que $\vec{A}$ et $\vec{C}$ soient parallèles.

EXERCICE 08 :

On applique une force uniforme $\vec{F} = 5.\vec{e}_x + 2.\vec{e}_y - 2.\vec{e}_z\ (N)$ à un corps pour le déplacer suivant le vecteur $\vec{L} = 3.\vec{e}_x + 3.\vec{e}_y - 4.\vec{e}_z\ (m)$.

1. Calculez le travail de la force $\vec{F}$ donné par la relation $W = \vec{F}\bullet\vec{L}$.
2. En déduire la projection de la force $\vec{F}$ suivant le vecteur $\vec{L}$.
3. Trouvez le vecteur unitaire $\vec{e}_F$ dans la direction de la force $\vec{F}$.
4. Trouvez la relation entre les composantes du vecteur $\vec{D} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z$ pour que le travail de la force $\vec{F}$ suivant ce déplacement soit nul.
5. Que représente cette relation.

EXERCICE 09 (*):

Si $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$, démontrez que

$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$ et que $\vec{A}\times\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$.

On donne : $\vec{A} = \vec{e}_x + 5.\vec{e}_y + 2.\vec{e}_z$ et $\vec{B} = -\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z$

1. Calculez $\vec{A}\times\vec{B}$.
2. Calculez $\left|(2\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}-2\vec{B})\right|$.
3. Trouvez un vecteur unitaire perpendiculaire au plan des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

EXERCICE 10 :

1. Donner la définition du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
2. On a $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$ donner l'expression du produit vectoriel $\vec{A}\times\vec{B}$ en coordonnées cartésienne.
3. Soit les deux vecteurs suivants : $\vec{A} = 2.\vec{e}_x + \vec{e}_y$ et $\vec{B} = \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z$. Calculer $\vec{A}\times\vec{B}$.
4. Calculer la surface du parallélogramme déterminée par les vecteurs : $\vec{V} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + 2\vec{e}_z$ et $\vec{V'} = 2.\vec{e}_x + 3.\vec{e}_y - 3.\vec{e}_z$.
5. Calculer la surface du triangle de sommets $P(1,3,2)$, $Q(2,-1,-1)$ et $R(-1,2,3)$.

EXERCICE 11 :

La force $\vec{F}$ appliquée à un fil conducteur de longueur L, parcouru par un courant I et plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, est donnée par la relation : $\vec{F} = I.\vec{L}\times\vec{B}$.

Tel que le vecteur $\vec{L}$ est dirigé suivant le sens du courant I.

Si on donne : $I = 10\ A$; $\vec{L} = 2.\vec{e}_x + 3.\vec{e}_y\ (m)$; $\vec{B} = 10^{-2}.\vec{e}_y + 10^{-3}.\vec{e}_z\ (Tesla)$.

1. Trouvez le vecteur $\vec{F}$ (unité : *Newton*).
2. Trouvez l'angle aigu formé par les deux vecteurs $\vec{L}$ et $\vec{B}$.

EXERCICE 12 (*):

Soit (r,θ) les coordonnées polaires décrivant la position d'un point matériel. Si $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire dirigé suivant $\vec{r}$ et si $\vec{e}_\theta$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{r}$, dirigé suivant les θ croissants, montrez que :

- $\vec{e}_r = \cos\theta\,.\,\vec{e}_x + \sin\theta\,.\,\vec{e}_y$; $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,.\,\vec{e}_x + \cos\theta\,.\,\vec{e}_y$
- $\vec{e}_x = \cos\theta\,.\,\vec{e}_r - \sin\theta\,.\,\vec{e}_\theta$; $\vec{e}_y = \sin\theta\,.\,\vec{e}_r + \cos\theta\,.\,\vec{e}_\theta$

EXERCICE 13 :

Soit $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ et $\theta = \left(\vec{e}_x, \overrightarrow{OM}\right)$ les coordonnées polaires décrivant la position d'un point matériel M.

Calculer les coordonnées cartésiennes des points $M_1 = \left(6, \frac{\pi}{6}\right)$ et $M_2 = \left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$.

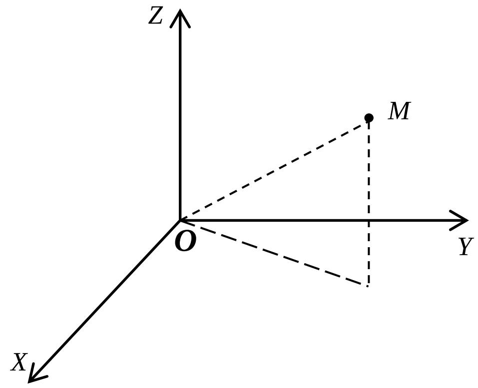
Calculer les coordonnées polaires des points $M_1' = (0,2)$ et $M_2' = (2,2)$.

EXERCICE 14 :

Pour le point M dans la figure ci-contre, représenter les paramètres qui fixent sa position en :

a. Coordonnées cartésiennes.
b. Coordonnées cylindriques.
c. Coordonnées sphériques.

Ecrire en coordonnées cartésiennes le vecteur $\vec{V}$ de module 13 unités, faisant un angle $\theta = 23°$ avec l'axe OZ et dont la projection sur le plan XOY fait un angle φ de $37°$ avec l'axe OX.



EXERCICE 15 (*):

Si $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$, $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$, $\vec{C} = C_x\vec{e}_x + C_y\vec{e}_y + C_z\vec{e}_z$. Démontrez que

$$\vec{A}\bullet\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

On donne : $\vec{A} = 2.\vec{e}_x + \vec{e}_y - 3.\vec{e}_z$, $\vec{B} = \vec{e}_x - 2.\vec{e}_y + \vec{e}_z$, $\vec{C} = -\vec{e}_x + \vec{e}_y - 4.\vec{e}_z$

Calculez $\vec{A}\bullet\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$; $\vec{C}\bullet\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$; $\vec{B}\bullet\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)$; $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ et $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}$.

EXERCICE 16 :

Montrez que les trois vecteurs $\vec{A} = 3.\vec{e}_x - 2.\vec{e}_y - 2.\vec{e}_z$, $\vec{B} = -\vec{e}_x + \vec{e}_y$ et $\vec{C} = -2.\vec{e}_x + 3.\vec{e}_y - 2.\vec{e}_z$ appartiennent au même plan.

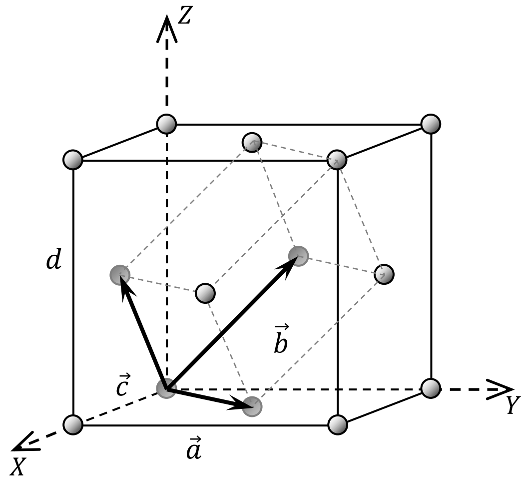
EXERCICE 17 (*):

Démontrez que

- $\vec{A}\bullet\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{C}\bullet\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\bullet\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)$
- $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{B}.\left(\vec{A}\bullet\vec{C}\right) - \vec{C}.\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)$

EXERCICE 18 :

La maille conventionnelle du réseau cristallin cubique à faces centrées est représenté par un cube d'arrête d ayant un nœud à chaque sommet du cube et un nœud au milieu de chaque face (figure ci-contre). On définit le repère orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ suivant trois arrêtes perpendiculaires du cube, et on définit les vecteurs de la maille élémentaire $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ comme le montre la figure.



1. Trouver les composantes des vecteurs $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ dans le repère orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
2. Les vecteurs $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, dans cet ordre, forment-ils un trièdre direct ?
3. Quelle est la valeur de l'angle γ entre deux vecteurs différents du système $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$?
4. Quel est le volume du parallélépipède, appelé maille élémentaire, définit par les trois vecteurs $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$?

EXERCICE 19 :

Si $\vec{r}(t) = (t^3 + 2.t).\vec{e}_x + 3.e^{-2t}\,\vec{e}_y + 2.\sin(5t).\vec{e}_z$ trouvez : $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$, $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, $\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$

EXERCICE 20 :

1. Montrez que si $\vec{A}(t)$ et $\vec{B}(t)$ sont deux fonctions de t dérivables alors :
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}(t)\bullet\vec{B}(t)\right) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\bullet\vec{B}(t) + \vec{A}(t)\bullet\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$
2. Soit $\vec{A}(t) = 3t^2.\vec{e}_x + 2t^3.\vec{e}_y - t.\vec{e}_z$ et $\vec{B}(t) = 3t.\vec{e}_x + 2t^2.\vec{e}_y + t^2.\vec{e}_z$. Calculer $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}(t)\bullet\vec{B}(t)\right)$:
   a. En appliquant cette règle de dérivation vectorielle.
   b. En explicitant le produit $\vec{A}\bullet\vec{B}$ puis en dérivant.

EXERCICE 21 :

Si $\vec{A}(t) = (3t^2 - 1).\vec{e}_x + (2t - 3).\vec{e}_y + (6t^2 - 4t).\vec{e}_z$ calculez : $\int_{t=1}^{t=2} \vec{A}(t).dt$

EXERCICE 22 :

Si $f(x,y,z) = x^2.y.z$ et $\vec{A}(x,y,z) = (3x^2y).\vec{e}_x + (y.z^2).\vec{e}_y - (x.z).\vec{e}_z$.

Trouvez : $\dfrac{\partial^2(f.\vec{A})}{\partial y \partial z}$ au point $(1,-2,-1)$.

EXERCICE 23 (*):

On donne le vecteur $\vec{A} = \cos\theta\,.\vec{e}_x + \sin\theta\,.\vec{e}_y$ tel que $\theta = \omega.t$.

1. Calculez le module de $\vec{A}$, que peut-on en conclure ?
2. Calculez les expressions des vecteurs suivants : $\vec{A}_1 = \frac{d\vec{A}}{dt}$; $\vec{A}_2 = \frac{d\vec{A}}{d\theta}$
3. Calculez le module de $\vec{A}_2$, que peut-on en conclure ?
4. Montrez que les vecteurs $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ sont parallèles, et que $\vec{A}_2$ est perpendiculaire à $\vec{A}$.
5. Représentez les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

EXERCICE 24 :

Si $f(x,y,z) = x^3yz^2$ et $\vec{A}(x,y,z) = (xyz).\vec{e}_x + (z^2).\vec{e}_y + (2y^2z).\vec{e}_z$.

Trouvez : $\vec{\nabla}.f$; $\vec{\nabla} \bullet \vec{A}$; $\vec{\nabla} \times \vec{A}$; $div(f.\vec{A})$; $\overrightarrow{rot}(f.\vec{A})$.

EXERCICE 25 :

Pour $f(x,y,z) = r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ et $\vec{A}(x,y,z) = \vec{r} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z$.

Calculer les expressions : $\overrightarrow{grad}(r)$; $div\left(\overrightarrow{grad}(r)\right)$; $\overrightarrow{grad}(r^2)$; $div\left(\overrightarrow{grad}(r^2)\right)$; $\overrightarrow{rot}(\vec{r})$.

EXERCICE 26 (*):

Si $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ avec $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

Montrez que $div\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = 0$

EXERCICE 27 (*):

Si $f(x,y,z) = xy - 3x^2z + 2yz$ et $\vec{A}(x,y,z) = (2x^2 - y^2z).\vec{e}_x + (y^3 - 2x^2z).\vec{e}_y + (x^2z^2).\vec{e}_z$

Montrez directement (en remplaçant) que $div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = 0$ et $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \vec{0}$.