RÉSUMÉ DU COURS

Pour décrire un mouvement quelconque on a besoin d'un point de référence et d'un système d'axes qu'on appelle **référentiel,** on appelle référentiel galiléen tout référentiel animé d'une vitesse constante. Tout référentiel ayant un mouvement de translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen (d'inertie) est aussi un référentiel d'inertie.
On définit les grandeurs suivantes :

- Vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
- Vecteur vitesse moyenne $\vec{V}_{moy} = \Delta\overrightarrow{OM}/\Delta t$.
- Vecteur vitesse instantanée $\vec{V} = d\overrightarrow{OM}/dt$.
- Vecteur accélération moyenne $\vec{a}_{moy} = \Delta\vec{V}/\Delta t$.
- Vecteur accélération instantanée $\vec{a} = d\vec{V}/dt$.

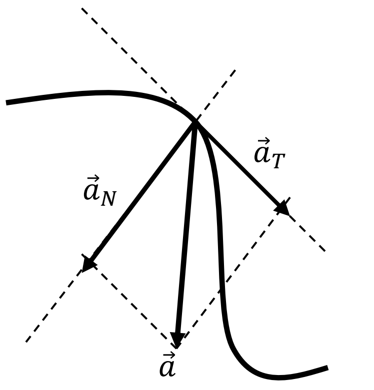
I- MOUVEMENT RECTILIGNE :

Mouvement rectiligne	Uniforme	Uniformément accéléré	Sinusoïdal
Vecteur position $\overrightarrow{OM} = x(t).\vec{e}_x$	$x(t) = V.t + x_0$	$x(t) = \frac{1}{2}a.t^2 + V_0.t + x_0$	$x(t) = x_0.\sin(\omega.t + \varphi)$
Vecteur vitesse $\vec{V} = x^{\bullet}(t).\vec{e}_x$	$V(t) = V = \text{Cte}$	$V(t) = a.t + V_0$	$V(t) = x_0.\omega.\cos(\omega.t + \varphi)$
Vect accélération $\vec{a} = x^{\bullet\bullet}(t).\vec{e}_x$	$a(t) = 0$	$a(t) = a = \text{Cte}$	$a(t) = -x_0.\omega^2.\sin(\omega.t + \varphi)$ $= -\omega^2.x(t)$

II- MOUVEMENT PLAN :

Coordonnées	Cartésiennes	Polaires
Position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$	$\vec{r} = x(t).\vec{e}_x + y(t).\vec{e}_y$	$\vec{r} = r.\vec{e}_r$
Vitesse $\vec{V}$	$\vec{V} = x^{\bullet}(t).\vec{e}_x + y^{\bullet}(t).\vec{e}_y$	$\vec{V} = r^{\bullet}.\vec{e}_r + r.\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta$
Accélération $\vec{a}$	$\vec{a} = x^{\bullet\bullet}(t).\vec{e}_x + y^{\bullet\bullet}(t).\vec{e}_y$	$\vec{a} = \left(r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2}\right).\vec{e}_r + (2r^{\bullet}.\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet}).\vec{e}_\theta$

$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta.\vec{e}_x + \sin\theta.\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta.\vec{e}_x + \cos\theta.\vec{e}_y \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{e}_r^{\bullet} = \theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\theta^{\bullet} = -\theta^{\bullet}.\vec{e}_r \end{cases}$



Composantes intrinsèques du vecteur accélération :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N}$$

$a_N = V^2/R$ accélération normale (change la direction de $\vec{V}$)
R est le rayon de courbure de la trajectoire
$a_T = dV/dt$ accélération tangentielle (change le module de $\vec{V}$)

Mouvement circulaire : $r(t) = R =$ Constante

Mouvement circulaire	Uniforme	Uniformément accéléré	Sinusoïdal
Position angulaire $\theta(t)$	$\theta(t) = \theta^\bullet.t + \theta_0$	$\theta(t) = \frac{1}{2}\gamma.t^2 + \theta_0^\bullet.t + \theta_0$	$\theta(t) = \theta_0.\sin(\omega.t + \phi)$
Vitesse angulaire $\theta^\bullet(t)$	$\theta^\bullet(t) =$ Cte	$\theta^\bullet(t) = \gamma.t + \theta_0^\bullet$	$\theta^\bullet(t) = \theta_0.\omega.\cos(\omega.t + \phi)$
Accél angulaire $\gamma(t) = \theta^{\bullet\bullet}(t)$	$\gamma(t) = 0$	$\gamma(t) = \gamma =$ Cte	$\gamma(t) = -\theta_0.\omega^2.\sin(\omega.t + \phi)$ $\gamma(t) = -\omega^2.\theta(t)$

III- MOUVEMENT DANS L'ESPACE :

Systèmes de coordonnées en géométrie euclidienne :

Coord	Cartésiennes	Sphériques	Cylindriques
Position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$	$\vec{r} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z$	$\vec{r} = r.\vec{e}_r$	$\vec{r} = \rho.\vec{e}_\rho + z.\vec{e}_z$
Déplacement $d\vec{r}$	$d\vec{r} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$	$d\vec{r} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta\,.d\varphi.\vec{e}_\varphi$	$d\vec{r} = d\rho.\vec{e}_\rho + \rho.d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z$
Vitesse $\vec{V}$	$\vec{V} = x^\bullet.\vec{e}_x + y^\bullet.\vec{e}_y + z^\bullet.\vec{e}_z$	$\vec{V} = r^\bullet.\vec{e}_r + r.\theta^\bullet.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta\,.\varphi^\bullet.\vec{e}_\varphi$	$\vec{V} = \rho^\bullet.\vec{e}_\rho + \rho.\varphi^\bullet.\vec{e}_\varphi + z^\bullet.\vec{e}_z$
Accélération $\vec{a}$	$\vec{a} = x^{\bullet\bullet}.\vec{e}_x + y^{\bullet\bullet}.\vec{e}_y + z^{\bullet\bullet}.\vec{e}_z$		

coordonnées sphériques:

$$\begin{cases} x = r.\sin(\theta)\,.\cos(\varphi) \\ y = r.\sin(\theta)\,.\sin(\varphi) \\ z = r.\cos(\theta) \end{cases}$$

coordonnes cylindriques:

$$\begin{cases} x = \rho.\cos(\varphi) \\ y = \rho.\sin(\varphi) \\ z = z \end{cases}$$

IV- MOUVEMENT RELATIF :

Soit un référentiel $(OXYZ)$ considéré comme fixe et un référentiel $(O'X'Y'Z')$ en mouvement, on a alors :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$		
$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_e$ $\vec{V}_e$: vitesse d'***entraînement***	$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'.\vec{e}^{\,\bullet}_{x'} + y'.\vec{e}^{\,\bullet}_{y'} + z'.\vec{e}^{\,\bullet}_{z'}$	$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}$
$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ $\vec{a}_e$ **Accél. d'entraînement**	$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'.\vec{e}^{\,\bullet\bullet}_{x'} + y'.\vec{e}^{\,\bullet\bullet}_{y'} + z'.\vec{e}^{\,\bullet\bullet}_{z'}$	$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}\right)$
$\vec{a}_c$ **Accél. de Coriolis**	$\vec{a}_c = 2.\left(x'^\bullet.\vec{e}^{\,\bullet}_{x'} + y'^\bullet.\vec{e}^{\,\bullet}_{y'} + z'^\bullet.\vec{e}^{\,\bullet}_{z'}\right)$	$\vec{a}_c = 2.\vec{\omega} \times \vec{V}'$

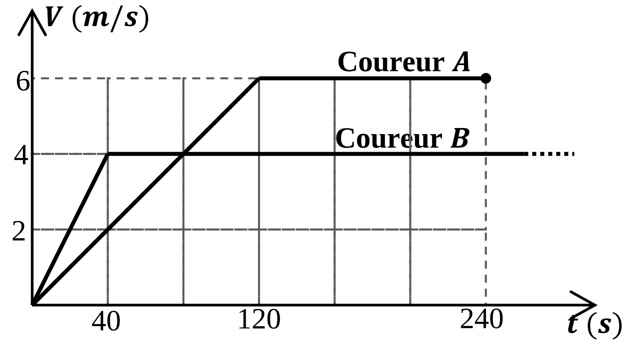
$\overrightarrow{OM}$, $\vec{V}$, et $\vec{a}$ sont respectivement les vecteurs positon, vitesse, et accélération dans le référentiel $(OXYZ)$.
$\overrightarrow{O'M}$, $\vec{V}'$, et $\vec{a}'$ sont respectivement les vecteurs positon, vitesse, et accélération dans le référentiel $(O'X'Y'Z')$.

SÉRIE DE TD N° 02

Mouvement rectiligne

EXERCICE 01 :

Sur la figure ci-contre on a représenté les diagrammes des vitesses de deux coureurs $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ se déplaçant sur une même piste en ligne droite. À l'instant initial les deux coureurs se trouvaient sur la ligne de départ considérée comme origine des coordonnées ($x_A(0) = x_B(0) = 0$).



1. Quelle est la nature du mouvement de chaque coureur ?
2. Calculer l'instant t_1 où les deux coureurs ont la même vitesse. Quel est le coureur en avance à cet instant et quelle distance D_1 le sépare de l'autre coureur ?
3. Quel est le coureur en avance à $t_2 = 120\ s$ et quelle distance D_2 le sépare de l'autre coureur ?
4. À quel instant t_3 les deux coureurs sont côte à côte dans la course ?
5. Le coureur $\boldsymbol{A}$ franchit la ligne d'arrivée à l'instant $t_4 = 240\ s$. À quel instant t_5 le coureur $\boldsymbol{B}$ franchit-il la ligne d'arrivée ?

EXERCICE 02 :

Un train se déplace sur une trajectoire rectiligne il commence son mouvement avec une accélération constante a_1 en démarrant à partir d'une vitesse initiale nulle, pour atteindre une vitesse de $V = 270\ km/h$ puis il continu son mouvement avec cette vitesse constante pendant un temps t_2. Enfin, il freine son mouvement avec une accélération constante $a_3 = -a_1$ pour s'arrêter après avoir parcouru une distance totale $X = 3\ km$ (durant les trois phases du mouvement).

1. Quelle doit être l'accélération a_1 du train pour que les trois étapes aient la même durée $(t_1 = t_2 = t_3)$?
2. Quelle est la distance parcourue à chaque étape. (x_1, x_2, x_3)
3. Ecrire les équations horaires des trois phases du mouvement en considérant l'origine des espaces le point de départ du train.

EXERCICE 03(*) :

Un cycliste roulant à vitesse constante $V > 0$ sur une route en ligne droite observe, à un instant donné, une voiture distante de d qui démarre devant lui avec une accélération constante $a > 0$.

1. Ecrire l'équation horaire du cycliste et de la voiture ; donner la nature de chacun des mouvements (on prend comme origine des temps $t = 0$ l'instant où la voiture démarre, et comme origine des espaces la position du cycliste à cet instant).
2. Si a et V sont fixées, montrez que le cycliste rattrape la voiture seulement si : $d \leq \frac{V^2}{2a}$
3. Déterminer le temps t_1 de la course poursuite (le temps où le cycliste rattrape la voiture) en fonction de a, V, et d.
4. Tracer les diagrammes des espaces du cycliste et de la voiture (sur le même graphe). Discuter graphiquement les divers scénarios de la course poursuite.
5. A.N. Calculer les temps de croisement pour $d = 10\ m$, $a = 2\ m/s^2$, $V = 36\ km/h$.

EXERCICE 04 :

La vitesse d'un point matériel se déplaçant sur une droite dirigée est donnée par l'équation suivante :

$$V(t) = 5\pi . \cos \pi(t + 1/2)$$

V est calculée en (m/s) et t en secondes (s).

1. Trouvez l'équation du mouvement $x(t)$ du point matériel sachant qu'à $t = 0\ s$; $x(0) = 5\ m$.
2. Donnez l'amplitude du mouvement (x_0), la période (T), la fréquence (υ), et la phase initiale (φ) du mouvement.
3. Calculez l'accélération $a(t)$ du mobile à un instant t donné.
4. Pour $0 \leq t \leq T$
   - Représentez les diagrammes des espaces, des vitesses et des accélérations.
   - Dans quels intervalles de temps le mouvement est-il accéléré ou décéléré ?

EXERCICE 05 :

Un point matériel se déplace sur une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe orienté (OX). Son mouvement se déroule en trois étapes :

- $t \in [0,10]\ s$: l'accélération est constante $a_1 = 3\ m/s^2$.
- $t \in [10,20]\ s$: l'accélération est nulle $a_2 = 0$.
- $t \in [20,40]\ s$: l'accélération est constante $a_3 = -2\ m/s^2$.

1. Calculer les vitesses $V_{1\text{fin}}$,$V_{2\text{fin}}$, $V_{3\text{fin}}$ à la fin de chaque étape, sachant que $V(t = 0) = 0$.
2. Tracer le digramme des vitesses du mobile.
   (Echelle des vitesses : $10\ m/s \rightarrow 1\ cm$; Echelle des temps : $5\ s \rightarrow 1\ cm$)
3. Pour quels intervalles de temps le mouvement est-il accéléré ou décéléré ? justifier.
4. Ecrire les expressions de la vitesse en fonction du temps pour les trois étapes. (*Prendre l'origine des temps au début de chaque étape*)
5. Ecrire les équations horaires du mouvement pour les trois étapes. (*Prendre l'origine des temps et des espaces le début de la première étape*).
6. Calculer le déplacement du mobile entre les instants $t = 0$ et $t = 40\ s$.

EXERCICE 06 :

Un point matériel M se déplace sur une trajectoire rectiligne suivant l'axe OX. A l'instant initial $(t = 0)$ le point M se trouve à l'origine des espaces O $(x = 0)$. La vitesse instantanée $V(t)$ du point matériel M est reliée à sa position $x(t)$ par l'équation différentielle suivante.

$$V = A.x + B$$

Tel que A et B sont des constantes positives.

1. Quelles sont les unités des constantes A et B dans le système [MKSA] ?
2. Montrez que le mouvement du point M se fait uniquement dans le domaine des x positifs.
3. Trouvez l'équation horaire du mouvement du point M (x en fonction de t).
4. En déduire les expressions de la vitesse $V(t)$ et de l'accélération $a(t)$.
5. Dans quels domaines de x le mouvement est-il accéléré ?

EXERCICE 07(*):

Un mobile animé d'une vitesse initiale $\vec{V}_0 = V_0.\vec{e}_x$ constante, pénètre dans un milieu résistant dans lequel il est soumis à une accélération $\vec{a} = -k.V^2.\vec{e}_x$; k est une constante et V est la vitesse instantanée.

1. En prenant pour origine des temps et des espaces le moment où le mobile pénètre dans le milieu, vérifier que la loi donnant $V(t)$ est:
$$V(t) = \frac{V_0}{1 + kV_0.t}$$
2. En déduire l'équation horaire du mouvement $x(t)$.
3. Montrer qu'après un parcours x, la vitesse est $V = V_0.e^{-k.x}$.

EXERCICE 08 :

Un corps solide, assimilé à un point matériel se déplace sur une droite, la relation entre sa position $x(t)$ et son accélération $a(t)$ est donnée par :

$$a - \omega^2.x = 0$$

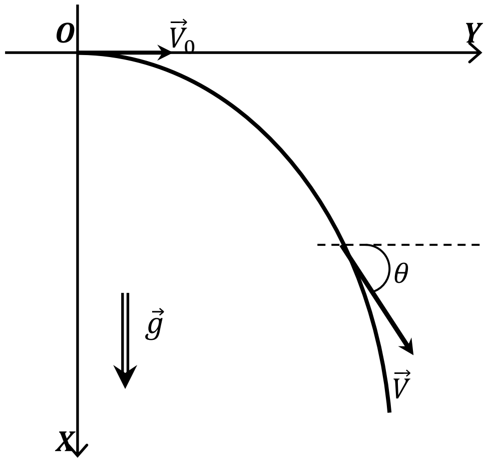
Tel que x est calculée en mètre et a en m/s^2. ω est une constante positive.

1. Vérifier que la forme générale de la position du mobile est donnée par : $x(t) = A.e^{\omega.t} + B.e^{-\omega.t}$.
2. Quelle est l'unité de ω dans le système [MKSA] ?
3. Calculer A et B sachant qu'à l'instant initial, le corps se trouvait en $x(t = 0) = x_0$ $(x_0 > 0)$ et que sa vitesse initiale était nulle $V(t = 0) = 0$.
4. En déduire l'expression de la position $x(t)$ la vitesse $V(t)$ et de l'accélération $a(t)$ en fonction du temps.
5. Dans quels domaines de t le mouvement est-il accéléré ?
6. Montrer que la relation reliant la vitesse à la position peut être écrite sous la forme $V^2 = \alpha.x^2 + \beta$. Déterminer α et β.

Mouvement plan

EXERCICE 09 :

Nous lançons une masse ponctuelle m d'une hauteur h avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ ***horizontale***, comme le montre la figure ci-contre. La masse m ne subit que l'attraction terrestre (accélération de pesanteur notée $\vec{g}$) et nous négligeons les frottements avec l'air.



1. Ecrire les équations horaires du mouvement suivant les axes OX et OY (***de la figure***).
2. Donner l'équation de la trajectoire.

Nous notons l'angle θ entre l'axe OY et le vecteur vitesse $\vec{V}$ ($\theta = angle(\vec{V}, \vec{e}_y)$)

3. Montrer que le rayon de courbure de la trajectoire en tout point est donnée par :

$$\rho = \frac{V_0^2}{g.\cos^3\theta}$$

EXERCICE 10 :

Le mouvement curviligne d'un mobile est décrit par les équations paramétriques en <u>coordonnées cartésiennes</u> :

$$x(t) = R.\omega.t - R.\sin(\omega.t) \quad ; \quad y(t) = R - R.\cos(\omega.t) \quad \text{avec} \quad 0 \le t \le 2\pi/\omega$$

t en secondes ; x et y e n mètre. R et ω sont des <u>constantes positives</u>.

1. Quelles sont les unités de R et ω dans le système [MKSA].
2. Calculer l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ en coordonnées cartésiennes.
3. Montrer que le module de la vitesse $V(t)$ s'écrit : $V(t) = 2.R.\omega.\sin(\omega.t/2)$.
   (On utilisera : $1 - \cos(\alpha) = 2.\sin^2(\alpha/2)$)
4. Calculer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ et de son module $a(t)$ en coordonnées cartésiennes.
5. Calculez la composante tangentielle a_T et la composante normale a_N du vecteur accélération en fonction du temps.
6. En déduire le rayon de courbure ρ en fonction du temps.

EXERCICE 11:

Le vecteur accélération du mouvement curviligne d'un mobile dans le plan (OXY) est donnée par les composantes cartésiennes suivantes :

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \quad ; \quad a_y(t) = a_0 = \text{constante} & \text{pour} \quad x \in [0, d] \\ a_x(t) = 0 \quad ; \quad a_y(t) = 0 & \text{pour} \quad x \in [d, 2d] \end{cases}$$

<u>pour $x \in [0, d]$</u>

Conditions initiales $x(t=0) = y(t=0) = 0$ et $V_x(t=0) = V_0$; $V_y(t=0) = 0$.

1. Trouver les composantes cartésiennes $V_x(t)$ et $V_y(t)$ de la vitesse en fonction du temps.
2. Ecrire les équations horaires du mouvement $x(t)$ et $y(t)$. En déduire l'équation de la trajectoire.
3. Trouver l'ordonnée y_1 du point limite d'abscisse $x_1 = d$ et les composantes de la vitesse (V_{x1}, V_{y1}) en ce point.

<u>pour $x \in [d, 2d]$</u>

4. Quelle la nature du mouvement ?
5. <u>En prenant comme conditions initiales la vitesse et la position finales de l'étape précédente</u>. Ecrire les équations horaires du mouvement $x(t)$ et $y(t)$. En déduire l'équation de la trajectoire.
6. Trouver l'ordonnée y_2 du point limite d'abscisse $x_2 = 2d$.
7. Calculer alors l'accélération a_0 dans le cas où $V_0 = 2 \times 10^6$ m/s , $d = 10\ cm$ et $y_2 = 12\ cm$.
8. Représenter la trajectoire pour les deux étapes et pour les valeurs numériques précédentes.
   (Echelle : $1\ cm \to 1\ cm$). Citer un exemple où on a un tel mouvement.

EXERCICE 12 :

Un point matériel M se déplace sur une trajectoire circulaire de rayon R.
Sa position angulaire est donnée par $\theta(t) = \alpha.\ln(1+\beta.t)$
Tel que R est exprimé en mètre ; θ en radian et t en secondes.
α et β sont des constantes positives.

1. Quelles sont les unités de α et de β.
2. Donner les expressions des composantes de la vitesse en coordonnées polaires.
3. Donner les expressions des composantes de l'accélération en coordonnées polaires.
4. Que représente ces composantes (vecteur accélération).
5. Calculer l'angle ϕ entre les vecteurs vitesse et accélération.

EXERCICE 13(*):

Une mouche M se déplace avec une vitesse V_0 constante sur l'aiguille des secondes d'une horloge murale. Initialement la mouche se trouvait au centre O de l'horloge et l'aiguille était orientée vers le chiffre 3 (***horizontale***), après une (01) minute la mouche arrive au bout de l'aiguille dont la longueur est de $20\ cm$.

1. Donnez les coordonnées polaires $r(t)$ et $\theta(t)$ du mouvement de la mouche.
2. Représentez la trajectoire du mouvement dans le plan. (Echelle : $2\ cm$(réel) $\rightarrow$ $1\ cm$(papier))
3. Calculez l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ en coordonnées polaires.
4. Calculez l'expression du vecteur accélérations $\vec{a}(t)$en coordonnées polaires.
5. Représentez, sur la trajectoire, le vecteur vitesse et accélération à $t = 30\ s$.
   (Echelle des vitesses : $1\ cm \rightarrow 2\times10^{-3}\ m/s$) (Echelle des accélérations : $1\ cm \rightarrow 2\times10^{-4}\ m/s^2$)
6. Calculez l'accélération tangentielle a_T à $t = 30\ s$.
7. Calculez l'accélération normale a_N à $t = 30\ s$.
8. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire ρ à $t = 30\ s$.

EXERCICE 14 :

Le mouvement curviligne d'un mobile est décrit par les équations paramétriques suivantes :

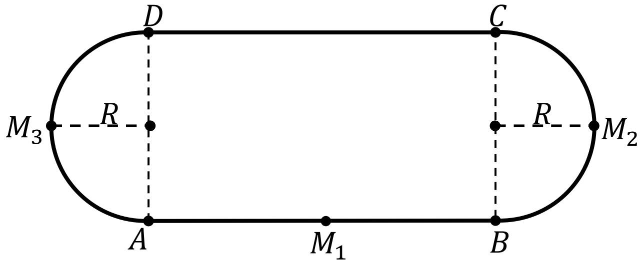
$$r(t) = 2R_0.\sin(\omega.t) \quad \text{et} \quad \theta(t) = \omega.t \quad (0 \le \omega.t \le \pi)$$

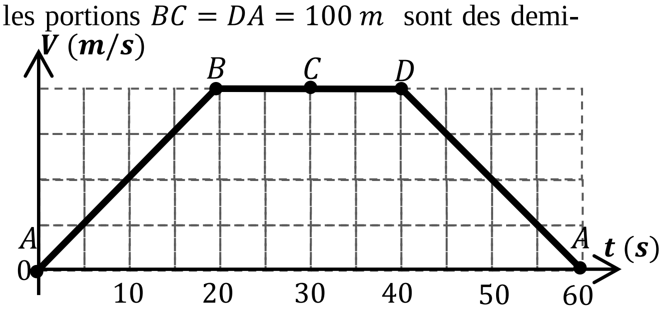
t en secondes ; r en mètre et ; θ en radians. R_0 et ω sont des constantes positives.

1. Trouver l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes. Représenter cette trajectoire dans repère orthonormé.
2. Calculer l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et de son module $V(t)$ en coordonnées polaires.
3. Calculer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ et de son module $a(t)$ en coordonnées polaires.
4. Calculer la composante tangentielle a_T et la composante normale a_N du vecteur accélération en fonction du temps.
5. En déduire le rayon de courbure ρ en fonction du temps.
6. Trouver les expressions des vecteurs unitaires ; $\vec{e}_T$ tangent à la trajectoire et $\vec{e}_N$ normal à la trajectoire.
   On donne : $\sin(2\alpha) = 2.\sin(\alpha).\cos(\alpha)$ et $\cos(2\alpha) = 1 - 2.\sin^2(\alpha)$.

EXERCICE 15(*):

Un coureur fait un tour de piste $ABCDA$ comme le montre la figure ci-dessous à gauche.
Le diagramme du *module de la vitesse* en fonction du temps est donné dans la figure de droite. Les points A, B, C, D puis A correspondent aux points représentés sur la piste.
Les portions $AB = CD = 100\ m$ sont des droites, et les portions $BC = DA = 100\ m$ sont des demi-cercles.





1. Donner, en justifiant, la nature du mouvement pour chaque étape.
2. Dans quels intervalles de temps le mouvement est accéléré ou décéléré ? Justifier.
3. Calculer la vitesse du coureur au point B.
4. Calculer les rayons R des demi-cercles BC et DA.
5. Ecrire l'expression *du module de la vitesse* en fonction du temps $V(t)$ pour chaque étape du mouvement. (Prendre l'origine des temps au début de chaque étape).
6. Calculer l'accélération normale a_N et tangentielle a_T du coureur aux points M_1, M_2 et M_3 milieux respectifs des portions AB, BC et DA. (Voir la figure)
7. Représenter les vecteurs vitesses et accélérations du coureur aux points M_1, M_2 et M_3.
   (Echelle des vitesses : $2\ m/s \to 1\ cm$; Echelle des accélérations : $1\ m/s^2 \to 2\ cm$)

Mouvement dans l'espace

EXERCICE 16(*):

L'équation du mouvement en spirale (hélicoïdal) est donnée par :

$$x(t) = b.\cos(\omega.t) \quad ; \quad y(t) = b.\sin(\omega.t) \quad ; \quad z(t) = c.\omega.t$$

1. Représentez le mouvement dans un repère orthonormé.
2. Calculez la vitesse et l'accélération dans le système de coordonnés cylindriques. quel est la nature du mouvement quand $b = 0$; ou quand $c = 0$.

EXERCICE 17 :

Le mouvement d'un point M dans l'espace est défini par :

$$x(t) = b.\cos(\gamma.t^2) \quad ; \quad y(t) = b.\sin(\gamma.t^2) \quad ; \quad z(t) = b.\gamma.t^2$$

1. Calculez les vecteurs, vitesse $\vec{V}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ en fonction de t.
2. Déterminez les accélérations tangentielle a_T et normale a_N en fonction de t.
3. En déduire le rayon de courbure $\rho(t)$ de la trajectoire.

EXERCICE 18(*):

Les coordonnées sphériques d'un mobile se déplaçant sur une sphère de rayon R, centrée en O, sont données par les lois horaires suivantes $\theta(t) = \omega.t$; $\varphi(t) = 12.\omega.t$

On donne $R = 5\ cm$ et $\omega = \pi/3\ \ rad/s$.

1. Décrivez la trajectoire du mobile.
2. Quelle est la position du mobile en coordonnées cartésiennes à $t = 1\ s$?
3. Quel est le temps nécessaire au mobile pour qu'il puisse arriver au point le plus bas de la sphère $(z = -R)$?
4. Calculez la vitesse du mobile à $t = 3\ s$.

Mouvement relatif

EXERCICE 19 :

Un avion se déplace de G vers A qui se trouve au nord de G puis retourne à G avec une vitesse v par rapport à l'air. La vitesse des vents est notée $v' \leq v$, et la distance $GA = L$.

1. Donnez l'expression du temps nécessaire pour effectuer le trajet aller-retour t_a en absence de vents.
2. Si les vents sont dans la direction est-ouest, prouvez que le temps t_b de l'aller-retour est :
$$t_b = \frac{t_a}{\sqrt{1 - \left(v'^2/v^2\right)}}$$
3. Si les vents sont dans la direction nord-sud, prouvez que le temps t_c de l'aller-retour est :
$$t_c = \frac{t_a}{1 - \left(v'^2/v^2\right)}$$
4. Prouvez que pour v' fixe on a t_c plus grand que t_b.
5. Si $v' = v$, pourrait-on faire les deux voyages ?

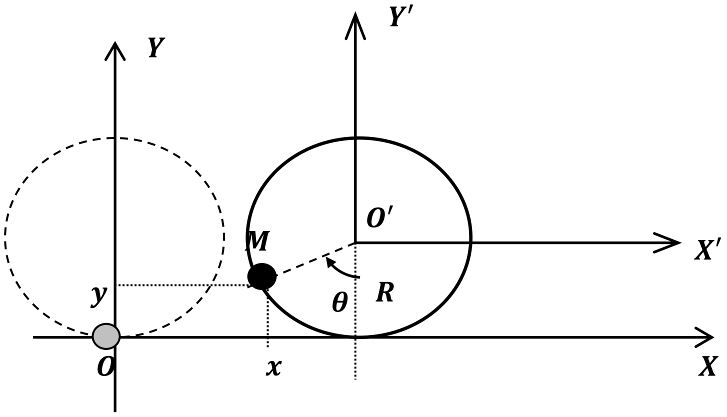
EXERCICE 20 (*):

Deux hommes veulent traverser une rivière de $1\ km$ de large, dont la vitesse du courant d'eau est $2\ km/h$. Le premier homme rame dans une direction perpendiculaire au bord de rivière atteint le point B, l'autre homme rame de façon à atteindre le point C à l'opposé de A.
Si les deux hommes ont une vitesse constante par rapport à l'eau $V = 4\ km/h$

1. Décrivez les deux mouvements AB et AC des deux hommes.
2. Quel homme arrive en premier ?
3. Pour quelle vitesse de courant les deux hommes ne peuvent-ils pas atteindre la rive opposée ?

EXERCICE 21:

Un cylindre de rayon R roule sans glisser sur un plan horizontal comme le montre la figure ci-contre. Le repère (OXY) est le repère lié au sol (considéré comme fixe), le repère $(O'X'Y')$ est le repère lié au cylindre (mobile) d'origine O' (axe du cylindre) et dont les axes X' et Y' sont parallèles respectivement aux axes X et Y.



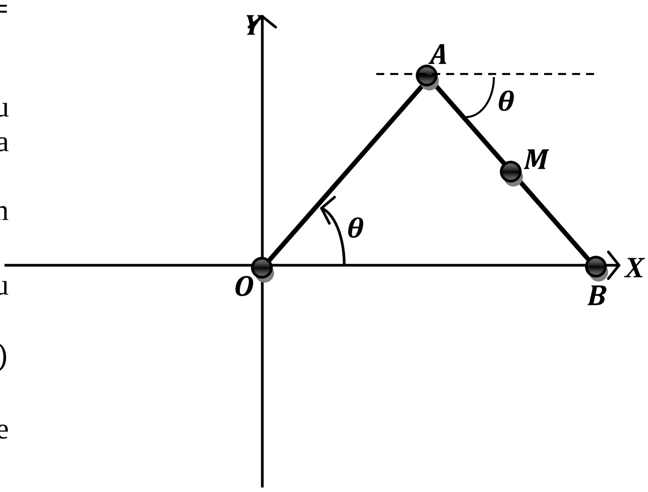
1. Trouvez les coordonnées x' et y' dans le repère $(O'X'Y')$ d'un point matériel M situé sur la périphérie du cylindre en fonction de l'angle de rotation $\theta(t)$ et de R. On donne à $t = 0$ $\theta(0) = 0$ (extrémité inférieure du cylindre).
2. Exprimez la relation entre les coordonnées (x, y) du repère fixe et les coordonnées (x', y') du repère mobile, en fonction de R et de θ.
3. En déduire les coordonnées x et y dans le repère (OXY) du point matériel M.
4. Calculez dans le repère (OXY), en fonction de $\theta(t)$ et de $\theta^{\bullet}(t)$ les composantes V_x et V_y de la vitesse du point M.
5. Que deviennent ces composantes aux points où M touche le plan horizontal.

Remarque : $\theta^{\bullet}(t) = d\theta/dt$

EXERCICE 22:

Soit un système constitué de deux barres identiques ($OA = AB = L$), ce système est ***articulé*** au point A, la barre OA tourne avec une vitesse angulaire constante ω dans le plan (XOY) autour d'un axe de rotation passant par le point O, et le point B peut glisser suivant l'axe OX ($x_B \in [-2L, +2L]$) (voir figure ci-dessous)

L'angle entre la barre OA est l'axe OX est notée θ : $\theta = \omega . t$ (ω est une constante)



1. Trouver les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement du point M qui se trouve au ***milieu*** de la barre AB.
2. En déduire l'équation de la trajectoire du point M en coordonnées cartésiennes.
3. Trouver les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ du point M et calculer son module.
4. Trouver les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ du point M et calculer son module.
5. Calculez les composantes, tangentielle a_T et normale a_N du vecteur accélération.
6. En déduire le rayon de courbure ρ.