# SOLUTIONS DE LA SÉRIE DE TD N° 02
# TRANSFORMATION DE LORENTZ–POINCARÉ

**<u>EXERCICE 01</u> :**

**1.** Transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct = \gamma_e(\beta_e.x' + ct') \\ x = \gamma_e(x' + \beta_e.ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ct' = \gamma_e(-\beta_e.x + ct) \\ x' = \gamma_e(x - \beta_e.ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Avec

$$\beta_e = \frac{v_e}{c} = 0{,}5 \quad \text{et} \quad \gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_e^2}} = 1{,}1547$$

Donc

$$E_1\begin{pmatrix} ct_1 = 1{,}2 \\ x_1 = 0{,}1 \\ y_1 = 0{,}5 \\ z_1 = 0{,}2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \xrightarrow{\text{T.Lorentz}} E_1\begin{pmatrix} ct'_1 = 1{,}328 \\ x'_1 = -0{,}577 \\ y'_1 = 0{,}5 \\ z'_1 = 0{,}2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

Et

$$E_2\begin{pmatrix} ct_2 = 1{,}501 \\ x_2 = 1{,}443 \\ y_2 = 0{,}1 \\ z_2 = 0{,}1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \xleftarrow{\text{T.Lorentz}} E_2\begin{pmatrix} ct'_2 = 0{,}9 \\ x'_2 = 0{,}8 \\ y'_2 = 0{,}1 \\ z'_2 = 0{,}1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

**2.** Carré de l'intervalle espace-temps

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Donc

$$s_{12}^2 = (1{,}501 - 1{,}2)^2 - (1{,}443 - 0{,}1)^2 - (0{,}1 - 0{,}5)^2 - (0{,}1 - 0{,}2)^2$$

$$s_{12}^2 = -1{,}883\ m^2$$

L'intervalle est du genre espace.

Cette valeur est invariante par changement de repère de l'espace-temps de Minkowski en utilisant la transformation de Lorentz.

$${s'_{12}}^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2$$

Donc

$${s'_{12}}^2 = (0{,}9 - 1{,}328)^2 - (0{,}8 + 0{,}577)^2 - (0{,}1 - 0{,}5)^2 - (0{,}1 - 0{,}2)^2$$

$${s'_{12}}^2 = -1{,}8829\ m^2$$

**EXERCICE 02 :**

$$E_0\begin{pmatrix} ct_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad E_0\begin{pmatrix} ct'_0 = 0 \\ x'_0 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

**1.** Les distances parcourues par les deux rayons lumineux dans leur référentiel propre qui est le référentiel du train sont $L/2$. Comme le rayon lumineux dans les deux cas et pour tous les référentiels se déplace avec une vitesse $c$ dans le vide.

$$x'_1 - x'_0 = -c(t'_1 - t'_0) \quad \Rightarrow \quad x'_1 = -ct'_1 = L/2$$
$$x'_2 - x'_0 = +c(t'_2 - t'_0) \quad \Rightarrow \quad x'_2 = +ct'_2 = -L/2$$

$$E_1\begin{pmatrix} ct'_1 = -L/2 \\ x'_1 = L/2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \qquad \text{et} \qquad E_2\begin{pmatrix} ct'_2 = -L/2 \\ x'_2 = -L/2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct = \gamma_e(\beta_e.x' + ct') \\ x = \gamma_e(x' + \beta_e.ct') \end{cases}$$

$$E_1\begin{pmatrix} ct_1 = -\gamma_e(1-\beta_e)\,L/2 \\ x_1 = \gamma_e(1-\beta_e)\,L/2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad E_2\begin{pmatrix} ct_2 = -\gamma_e(1+\beta_e)\,L/2 \\ x_2 = -\gamma_e(1+\beta_e)\,L/2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

**2.** La durée est l'intervalle de temps qui sépare les deux événements.

Pour un observateur lié au référentiel $\mathcal{R}$ :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = -\gamma_e\beta_e\frac{L}{c}$$

Pour un observateur lié au référentiel $\mathcal{R}'$ :

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0$$

Donc, les deux événements sont simultanés pour l'observateur lié à $\mathcal{R}'$ mais ne sont pas simultanés pour un observateur lié à $\mathcal{R}$.

Carré de l'intervalle espace-temps

$$s'^2_{12} = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2$$

Donc

$$s'^2_{12} = \left(-\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right)^2 - \left(-\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\right)^2 = -L^2$$

L'intervalle est du genre espace car il concerne deux rayons lumineux différents.

Cette valeur est invariante par changement de repère de l'espace-temps de Minkowski en utilisant la transformation de Lorentz.

$$s^2_{12} = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$$

Donc

$$s^2_{12} = (-\gamma_e\beta_e L)^2 - (-\gamma_e L)^2 = \gamma_e^2(\beta_e^2 - 1)L^2 = -L^2$$

**EXERCICE 03 :**

**1.** Produit de deux transformations de Lorentz en écriture hyperbolique.

On note, suivants les conditions de la transformation de Lorentz :

$v_e$ la vitesse de translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. $\beta_e = v_e/c$ et $\gamma_e = (1-\beta_e^2)^{-1/2}$

$v_e'$ la vitesse de translation de $\mathcal{R}''$ par rapport à $\mathcal{R}'$. $\beta_e' = v_e'/c$ et $\gamma_e' = \left(1-\beta_e'^2\right)^{-1/2}$

On pose :

$$\begin{cases}\beta_e = \tanh r_e \\ \beta_e' = \tanh r_e'\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma_e = \cosh r_e \\ \gamma_e' = \cosh r_e'\end{cases}$$

D'où les transformations de Lorentz s'écrivent :

$$\begin{cases}ct = \cosh(r_e)\,.\,ct' + \sinh(r_e)\,.\,x' \\ x = \sinh(r_e)\,.\,ct' + \cosh(r_e)\,.\,x'\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}ct' = \cosh(r_e')\,.\,ct'' + \sinh(r_e')\,.\,x'' \\ x' = \sinh(r_e')\,.\,ct'' + \cosh(r_e')\,.\,x''\end{cases}$$

En remplaçant $ct'$ et $x'$ dans la première transformation

$$\begin{cases}ct = \cosh(r_e)\,.\,(\cosh(r_e')\,.\,ct'' + \sinh(r_e')\,.\,x'') + \sinh(r_e)\,.\,(\sinh(r_e')\,.\,ct'' + \cosh(r_e')\,.\,x'') \\ x = \sinh(r_e)\,.\,(\cosh(r_e')\,.\,ct'' + \sinh(r_e')\,.\,x'') + \cosh(r_e)\,.\,(\sinh(r_e')\,.\,ct'' + \cosh(r_e')\,.\,x'')\end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases}ct = (\cosh(r_e)\cosh(r_e') + \sinh(r_e)\sinh(r_e')).\,ct'' + (\cosh(r_e)\sinh(r_e') + \sinh(r_e)\cosh(r_e')).\,x'' \\ x = (\sinh(r_e)\cosh(r_e') + \cosh(r_e)\sinh(r_e')).\,ct'' + (\sinh(r_e)\sinh(r_e') + \cosh(r_e)\cosh(r_e')).\,x''\end{cases}$$

Comme

$$\begin{cases}\sinh(r_e)\sinh(r_e') + \cosh(r_e)\cosh(r_e') = \cosh(r_e + r_e') \\ \sinh(r_e)\cosh(r_e') + \cosh(r_e)\sinh(r_e') = \sinh(r_e + r_e')\end{cases}$$

Il vient que

$$\boxed{\begin{cases}ct = \cosh(r_e + r_e')\,.\,ct'' + \sinh(r_e + r_e')\,.\,x'' \\ x = \sinh(r_e + r_e')\,.\,ct'' + \cosh(r_e + r_e')\,.\,x''\end{cases}}$$

Qui a la forme d'une transformation de Lorentz avec une rapidité

$$\boxed{r_e'' = r_e + r_e'}$$

**2.** Pour que le produit de ces transformations soit égal à l'unité.

$$\begin{cases}ct = ct'' \\ x = x''\end{cases}$$

Donc

$$\cosh(r_e + r_e') = 1 \quad \text{et} \quad \sinh(r_e + r_e') = 0$$

Ce qui est vérifié pour

$$r_e + r_e' = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_e = -r_e'}$$

Calcul de la rapidité :

$$E(t = 2\,ns\,,\ x = 1{,}5\ m)_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad E(t',\ x' = 1{,}7\,m\,)_{\mathcal{R}'}$$

Ou (en mètre) :

$$E\begin{pmatrix}ct = 0{,}6 \\ x = 1{,}5\end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad E\begin{pmatrix}ct' \\ x' = 1{,}7\end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

La transformation de Lorentz

$$\begin{cases}ct' = \gamma_e(ct - \beta_e.x) \\ x' = \gamma_e(-\beta_e.ct + x)\end{cases}$$

En remplaçant

$$\begin{cases} ct' = \gamma_e(0{,}6 - \beta_e.1{,}5) \\ 1{,}7 = \gamma_e(-\beta_e.0{,}6 + 1{,}5) \end{cases}$$

La deuxième équation donne

$$1{,}7\sqrt{1-\beta_e^2} = -\beta_e.0{,}6 + 1{,}5$$

En élevant les deux membres de l'équation au carré

$$(1{,}7)^2 \times (1-\beta_e^2) = (-\beta_e.0{,}6 + 1{,}5)^2$$

Ce qui nous ramène à une équation du deuxième degré

$$3{,}25.\beta_e^2 - 1{,}8.\beta_e - 0{,}64 = 0$$

Le discriminant

$$\Delta = \sqrt{(1{,}8)^2 + 4 \times 3{,}25 \times 0{,}64} = 3{,}4$$

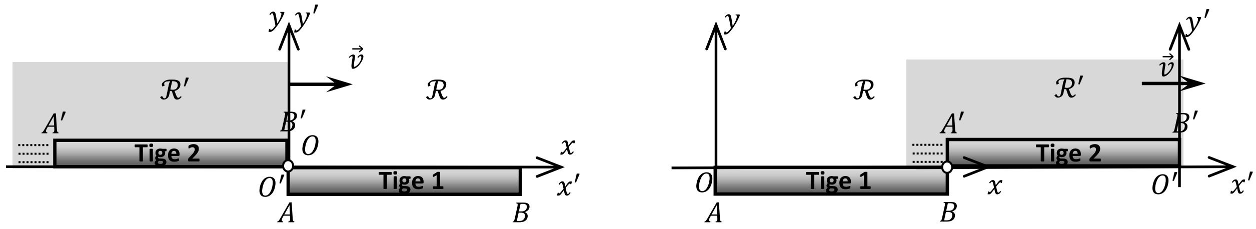
D'où les solutions

$$\begin{cases} \beta_e = 0{,}8 \\ \beta_e = -(1{,}6/6{,}5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_e = 1{,}6667 \\ \gamma_e = 1{,}0317 \end{cases} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{cases} r_e = 1{,}0986 \\ r_e = -0{,}2512 \end{cases}}$$

En remplaçant dans la première équation nous trouvons :

$$\begin{cases} \beta_e = 0{,}8 \\ \beta_e = -0{,}2461 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ct' = -1\,m \\ ct' = +1\,m \end{cases} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{cases} t' = -3{,}33\,ns \\ t' = +3{,}33\,ns \end{cases}}$$

**EXERCICE 04 :**




$E_1 =$ « $A$ et $B'$ coïncident » ; $E_2 =$ « $B$ et $A'$ coïncident ».

**1.** Coordonnées des événements $E_1$ et de $E_2$ dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

$$E_1 \begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad ; \qquad E_1 \begin{pmatrix} ct_1' \\ x_1' = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct_1 = \gamma(\beta.0 + ct_1') \\ 0 = \gamma(0 + \beta.ct_1') \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ct_1 = 0 \\ ct_1' = 0 \end{cases}$$

Donc

$$E_1 \begin{pmatrix} ct_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad ; \qquad E_1 \begin{pmatrix} ct_1' = 0 \\ x_1' = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

$$E_2 \begin{pmatrix} ct_2 \\ x_2 = l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad ; \qquad E_2 \begin{pmatrix} ct_2' \\ x_2' = -l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct_2 = \gamma(-\beta l + ct_2') \\ l = \gamma(-l + \beta.ct_2') \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ct_2 = \dfrac{1+\gamma}{\gamma\beta} l \\ ct_2' = \dfrac{1+\gamma}{\gamma\beta} l \end{cases}$$

Donc

$$E_2 \begin{pmatrix} ct_2 = \dfrac{1+\gamma}{\gamma\beta} l \\ x_2 = l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad ; \qquad E_2 \begin{pmatrix} ct_2' = \dfrac{1+\gamma}{\gamma\beta} l \\ x_2' = -l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

**2.** Carré de l'intervalle entre les deux événements.

$$s_{12}^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = \left(\frac{1+\gamma}{\gamma\beta} l\right)^2 - l^2$$

$$s_{12}^2 = \frac{1 + 2\gamma + \gamma^2(1-\beta^2)}{\gamma^2\beta^2} l^2 = 2\frac{1+\gamma}{\gamma^2\beta^2} l^2$$

Et

$${s_{12}'}^2 = (ct_2' - ct_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 = \left(\frac{1+\gamma}{\gamma\beta} l\right)^2 - (-l)^2$$

$${s_{12}'}^2 = 2\frac{1+\gamma}{\gamma^2\beta^2} l^2 = s_{12}^2$$

Intervalle genre temps

**3.** Pour : $l = 1\,m$ et $v = 0{,}8.c \quad \Rightarrow \quad \beta = 0{,}8 \quad ; \quad \gamma = 1/0{,}6 \quad$ et $\quad \gamma\beta = 4/3$ .

$$E_1\begin{pmatrix} ct_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad ; \qquad E_1\begin{pmatrix} ct'_1 = 0 \\ x'_1 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

$$E_2\begin{pmatrix} ct_2 = 2\,m \\ x_2 = 1\,m \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad ; \qquad E_2\begin{pmatrix} ct'_2 = 2\,m \\ x'_2 = -1\,m \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

$$s_{12}^2 = {s'_{12}}^2 = 3\,m^2$$

**EXERCICE 05 :**

**1.** Transformation de Lorentz.

$$\begin{cases} ct = \gamma_e(ct' + \beta_e.x') \\ x = \gamma_e(\beta_e.ct' + x') \end{cases}$$

**2.** Matrice de Lorentz.

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad L = \begin{pmatrix} \gamma_e & \gamma_e\beta_e \\ \gamma_e\beta_e & \gamma_e \end{pmatrix}$$

**3.** Valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} \gamma_e - \lambda & \gamma_e\beta_e \\ \gamma_e\beta_e & \gamma_e - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\gamma_e - \lambda)^2 - (\gamma_e\beta_e)^2 = 0$$

$$\begin{cases} \gamma_e - \lambda_1 = +\gamma_e\beta_e \\ \gamma_e - \lambda_2 = -\gamma_e\beta_e \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{cases} \lambda_1 = \gamma_e(1 - \beta_e) \\ \lambda_2 = \gamma_e(1 + \beta_e) \end{cases}}$$

**4.** Le système d'équations caractéristiques.

$$\begin{cases} (\gamma_e - \lambda)ct' + \gamma_e\beta_e x' = 0 \\ \gamma_e\beta_e ct' + (\gamma_e - \lambda)x' = 0 \end{cases}$$

En remplaçant par les valeurs propres précédentes :

Pour $\lambda_1 = \gamma_e(1 - \beta_e)$

$$\begin{cases} \gamma_e\beta_e ct' + \gamma_e\beta_e x' = 0 \\ \gamma_e\beta_e ct' + \gamma_e\beta_e x' = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad x' = -ct'$$

Et la pente du vecteur propre

$$\boxed{\frac{ct'}{x'} = -1}$$

Pour $\lambda_2 = \gamma_e(1 + \beta_e)$

$$\begin{cases} -\gamma_e\beta_e ct' + \gamma_e\beta_e x' = 0 \\ \gamma_e\beta_e ct' - \gamma_e\beta_e x' = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad x' = +ct'$$

Et la pente du vecteur propre

$$\boxed{\frac{ct'}{x'} = +1}$$

Ces directions représentent les deux droites de lumière délimitant le cône (plat) de lumière dans l'espace de Minkowski.

Le vecteur propre d'une matrice est un vecteur qui ne change pas de direction (de pente) par l'application de cette matrice (produit de la matrice par le vecteur).
L'invariance des pentes de ces deux directions par l'application de la matrice $L$ exprime l'invariance, par la transformation de Lorentz, de la vitesse de la lumière pour tous les référentiels galiléens.

**EXERCICE 06 :**

Une barre de longueur propre $l$ se déplace parallèlement à elle-même avec une vitesse constante $v$ par rapport à un observateur considéré comme fixe. Déterminer la vitesse de déplacement de la barre en sachant que la longueur de la barre mesurée par l'observateur est égale à $l/2$.

$$l_p = \gamma_e . l_i$$

$$\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_e^2}} = \frac{l_p}{l_i}$$

$$\beta_e^2 = 1 - \left(l_i/l_p\right)^2$$

$$\boxed{v = c\sqrt{1 - \left(l_i/l_p\right)^2}}$$

Comme

$$l_p = l \quad \text{et} \quad l_i = l/2$$

$$\boxed{v = c\sqrt{1-(1/2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}c}$$

**EXERCICE 07 :**

**1.** La durée qui sépare la formation et la désintégration du muon par rapport à $\mathcal{R}$.

$$\boxed{\Delta t = t_d - t_f = \frac{d}{v}} \qquad \text{Numériquement :} \qquad \boxed{\Delta t = 1{,}6835 \times 10^{-5}\ secondes}$$

**2.** Coordonnées des deux événements par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ .

$$E_f \begin{pmatrix} ct_f = 0 \\ x_f = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad E_d \begin{pmatrix} ct_d = d/\beta \\ x_d = d \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Coordonnées des deux événements par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$.

$$E_f \begin{pmatrix} ct'_f = 0 \\ x'_f = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \qquad \text{et} \qquad E_d \begin{pmatrix} ct'_d \\ x'_d \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct'_f = \gamma(ct_f - \beta.x_f) = 0 \\ x'_f = \gamma(-\beta.ct_f + x_f) = 0 \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} ct'_d = \gamma(ct_d - \beta.x_d) \\ x'_d = \gamma(-\beta.ct_d + x_d) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} ct'_d = \gamma\left(\frac{d}{\beta} - \beta d\right) = \gamma(1-\beta^2)\frac{d}{\beta} = \frac{d}{\gamma\beta} \\ x'_d = \gamma\left(-\beta\frac{d}{\beta} + d\right) = 0 \end{cases}$$

Finalement

$$E_f \begin{pmatrix} ct'_f = 0 \\ x'_f = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \qquad \text{et} \qquad E_d \begin{pmatrix} ct'_d = d/\gamma\beta \\ x'_d = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

**3.** Intervalle espace-temps entre les deux événements $E_f$ et $E_d$.

$$s_{fd}^2 = (ct_d - ct_f)^2 - (x_d - x_f)^2 = \left(\frac{d}{\beta}\right)^2 - d^2$$

$$\boxed{s_{fd}^2 = \frac{1-\beta^2}{\beta^2}\, d^2 = \frac{1}{\gamma^2\beta^2}\, d^2}$$

Et

$$s'^{\,2}_{fd} = (ct'_d - ct'_f)^2 - (x'_d - x'_f)^2 = \left(\frac{d}{\gamma\beta}\right)^2 - (0)^2 = s_{fd}^2$$

Intervalle genre temps

**4.** Durée de vie propre du muon.

$t'_d$ et $t'_f$ sont liés au référentiel propre du muon. Donc

$$c\Delta\tau = ct'_d - ct'_f = d/\gamma\beta$$

Et

$$\boxed{\Delta\tau = \frac{d}{\gamma v} = \frac{1}{\gamma}\Delta t} \qquad \text{Numériquement :} \qquad \boxed{\Delta\tau = 2{,}3748 \times 10^{-6}\ secondes}$$

**EXERCICE 08 :**

**1.** La loi donnée par l'effet Doppler-Fizeau longitudinal est

$$f_{\text{réc}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_{\text{ém}}$$

Avec

$$f_{\text{réc}} = \frac{c}{\lambda_r} \quad \text{et} \quad f_{\text{ém}} = \frac{c}{\lambda_s}$$

Ce qui donne

$$\lambda_r = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda_s$$

Donc

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_s}\right)^2$$

Et

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c} = \frac{(\lambda_r/\lambda_s)^2 - 1}{(\lambda_r/\lambda_s)^2 + 1}}$$

Application numérique : $\lambda_r = 270\ nm$ ; $\lambda_s = 126\ nm \quad \Rightarrow \quad (\lambda_r/\lambda_s)^2 = 4{,}5918$

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c} = 0{,}64233}$$

Comme $\beta > 0$ alors la source et le récepteur s'éloignent l'un de l'autre.

**2.** En utilisant la loi classique de l'effet doppler (sans les corrections relativistes), en considérant le récepteur fixe et l'émetteur en mouvement.

$$f_{\text{réc}} = \left(\frac{c - v_{\text{réc}}}{c + v_{\text{ém}}}\right) f_{\text{ém}} = \left(\frac{c}{c + v_{\text{ém}}}\right) f_{\text{ém}}$$

Ce qui donne

$$\frac{c}{c + v_{\text{ém}}} = \frac{f_{\text{réc}}}{f_{\text{ém}}} = \frac{\lambda_s}{\lambda_r}$$

D'où

$$v_{\text{ém}} = c\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_s} - 1\right) = c.1{,}1428$$

Ce qui est impossible.

*Remarque :*

Nous avons utilisé ici

$$\frac{f_{\text{réc}}}{f_{\text{ém}}} = \frac{\lambda_s}{\lambda_r}$$

Mais en fait, si nous raisonnons de manière classique. La longueur d'onde est invariante dans la relativité galiléenne, ce sont les vitesses de propagation de l'onde qui diffèrent d'un référentiel à un autre. La vitesse étant absolue seulement par rapport au milieu de propagation (éther).

**<u>EXERCICE 09</u> :**

**1.** En utilisant la transformation de Lorentz-Poincaré

$$\begin{cases} ct = \gamma(\beta.x' + ct') \\ x = \gamma(x' + \beta.ct') \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ct' = \gamma(-\beta.x + ct) \\ x' = \gamma(x - \beta.ct) \end{cases}$$

Avec

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

En prenant comme événement d'origine l'événement $E_0 =$ « la tête du train sort du tunnel »

$$E_0 \begin{pmatrix} ct_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad ; \quad E_0 \begin{pmatrix} ct'_0 = 0 \\ x'_0 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

L'événement $E_1 =$ « la queue du train entre dans le tunnel »

$$E_1 \begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 = -L \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad ; \quad E_1 \begin{pmatrix} ct'_1 \\ x'_1 = -l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

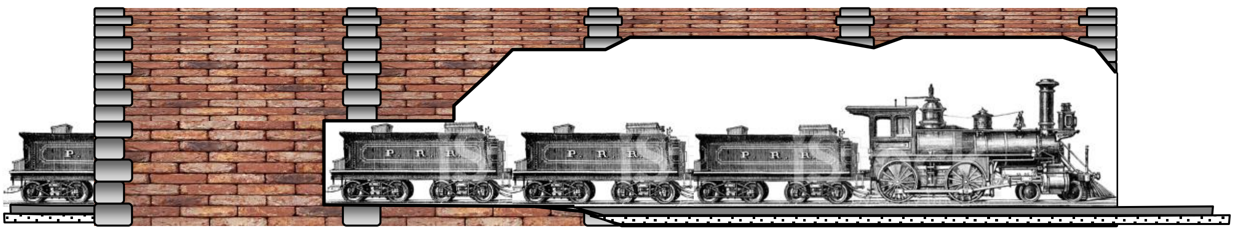
En effet : l'extrémité arrière du train dans son référentiel propre $\mathcal{R}'$ se trouve à une distance $l$ de son extrémité avant (longueur propre du train) et l'entrée du tunnel se trouve à une distance L de sa sortie dans le référentiel propre du tunnel $\mathcal{R}$.

La transformation de Lorentz donne

$$\begin{cases} ct_1 = \gamma(-\beta.l + ct'_1) \\ x_1 = \gamma(-l + \beta.ct'_1) = -L \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ct'_1 = \gamma(+\beta.L + ct_1) \\ -l = \gamma(-L - \beta.ct_1) \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\boxed{ct_1 = \frac{1}{\beta}\left(\frac{l}{\gamma} - L\right) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{ct'_1 = \frac{1}{\beta}\left(-\frac{L}{\gamma} + l\right) = \frac{l}{\beta}\left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\right) = \beta l}$$



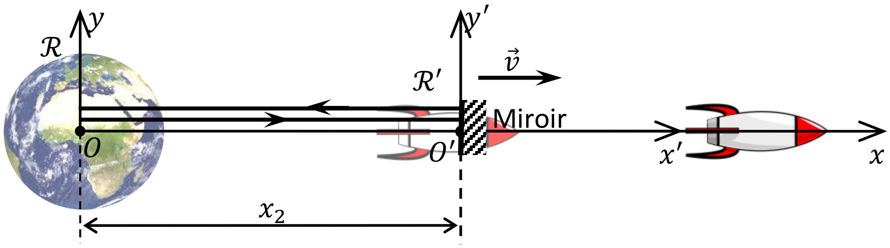
**2.** Pour un observateur lié au référentiel terrestre $\mathcal{R}$, les deux événements $E_0$ et $E_1$ sont simultanés. C'est-à-dire que pour cet observateur la queue du train va entrer dans le tunnel et la tête du train va sortir du tunnel au même instant $(ct_1 = ct_0 = 0)$, et à cet instant le train est totalement à l'intérieur du tunnel.

En utilisant la contraction des longueurs pour l'observateur lié à $\mathcal{R}$. La longueur du tunnel reste la même car c'est sa longueur propre $\left(l_{\text{tunnel propre}} = L = l/\gamma\right)$, mais la longueur du train mesurée par cet observateur est impropre, elle est égale à la longueur propre du train divisée par le facteur relativiste $\gamma$ $\left(l_{\text{train impropre}} = l_{\text{train propre}}/\gamma = l/\gamma\right)$. Si bien que, pour l'observateur lié à $\mathcal{R}$ les deux longueurs mesurées sont égales et le train semble entrer entièrement dans le tunnel.

**3.** Pour un observateur lié au référentiel du train $\mathcal{R}'$, les deux événements $E_0$ et $E_1$ ne sont pas simultanés. C'est-à-dire que pour cet observateur la queue du train entre dans le tunnel après que la tête du train sort du tunnel $(ct'_1 = \beta l > ct'_0 = 0)$.

En utilisant la contraction des longueurs pour l'observateur lié à $\mathcal{R}'$. La longueur du train reste la même car c'est sa longueur propre $\left(l_{\text{train propre}} = l\right)$, mais la longueur du tunnel mesurée par cet observateur est impropre, elle est égale à la longueur propre du tunnel divisée par le facteur relativiste $\gamma$ $\left(l_{\text{tunnel impropre}} = l_{\text{tunnel propre}}/\gamma = l/\gamma^2\right)$. Si bien que, pour l'observateur lié à $\mathcal{R}'$ la longueur mesurée du train est plus grande que la longueur mesurée du tunnel $(\gamma > 1)$. Donc de son point de vue le train dépasse du tunnel.

**<u>EXERCICE 10</u> :**




**1.** Ecrire en fonction de $\beta, \gamma$ et $cT$ les coordonnées des événements $E_1$, $E_2$ et $E_3$ dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ (remarquer que : $t_2 = t_1 + (x_2/c)$ et $t_3 = t_2 + (x_2/c)$).

Transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta.x') \\ x = \gamma(\beta.ct' + x') \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta.x) \\ x' = \gamma(-\beta.ct + x) \end{cases}$$

<u>Evénement $E_1$ « émission du signal à partir de la Terre »</u>

$$x_1 = 0 \quad \text{et} \quad ct_1 = cT$$

Donc

$$\begin{cases} cT = \gamma(ct'_1 + \beta.x'_1) \\ 0 = \gamma(\beta.ct'_1 + x'_1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ct'_1 = \gamma(cT - \beta.0) \\ x'_1 = \gamma(-\beta.cT + 0) \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\boxed{E_1 \begin{pmatrix} ct_1 = cT \\ x_1 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_1 \begin{pmatrix} ct'_1 = \gamma cT \\ x'_1 = -\beta\gamma cT \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$$

<u>Evénement $E_2$ « réception-réflexion du signal sur la fusée »</u>

$$x'_2 = 0 \quad \text{et} \quad ct_2 = ct_1 + x_2 = cT + x_2$$

Donc

$$\begin{cases} ct_2 = \gamma(ct'_2 + \beta.0) = cT + x_2 \\ x_2 = \gamma(\beta.ct'_2 + 0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta.x_2) \\ 0 = \gamma(-\beta.ct_2 + x_2) \end{cases}$$

La quatrième équation donne

$$0 = \gamma(-\beta.ct_2 + x_2) \quad \Rightarrow \quad -\beta.(cT + x_2) + x_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \beta cT/(1-\beta)$$

Donc
$$ct_2 = cT + x_2 = cT/(1-\beta)$$

Et en remplaçant dans la troisième équation

$$ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta.x_2) = \gamma\frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta)}cT = \frac{1}{\gamma(1-\beta)}cT$$

Ce qui donne

$$\boxed{E_2 \begin{pmatrix} ct_2 = cT/(1-\beta) \\ x_2 = \beta cT/(1-\beta) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_2 \begin{pmatrix} ct'_2 = cT/\gamma(1-\beta) \\ x'_2 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$$

<u>Evénement $E_3$ « réception du signal sur Terre»</u>

$$x_3 = 0 \quad \text{et} \quad ct_3 = ct_2 + x_2 = \frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}cT$$

Donc

$$\begin{cases} ct_3 = \gamma(ct'_3 + \beta.x'_3) \\ 0 = \gamma(\beta.ct'_3 + x'_3) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ct'_3 = \gamma(ct_3 - \beta.0) \\ x'_3 = \gamma(-\beta.ct_3 + 0) \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\boxed{E_3 \begin{pmatrix} ct_3 = (1+\beta)cT/(1-\beta) \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_3 \begin{pmatrix} ct'_3 = \gamma\,(1+\beta)cT/(1-\beta) \\ x'_3 = -\beta\gamma\,(1+\beta)cT/(1-\beta) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$$

**2.** Représenter sur le diagramme de Minkowski pour $\beta = 0{,}5$ les axes $(x', ct')$ puis les événements $E_2$ et $E_3$ en précisant leurs coordonnées.

$$\beta = 0{,}5$$

$$\gamma = 1/\sqrt{0{,}75} = 2/\sqrt{3}$$

$$E_2 \begin{pmatrix} ct_2 = 2.\,cT \\ x_2 = cT \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

$$E_3 \begin{pmatrix} ct_3 = 3.\,cT \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Et

$$cT \rightarrow 2\ cm$$