جامعة زيان عاشور - الجلفة
كلـــــية العلـــوم و التكنولوجـــــــيا

قسم علـــوم المادة | ليسانس فيزياء المواد / السداسي الخامس
مدة الإمتحان: ساعة و نصف | 2016/02/17

Epreuve de Physique Statistique

EXERCICE 1:

Une étude effectuée auprès de jeunes enfants montre que les premiers mots apparaissent, en moyenne, à 11,5 mois avec un écart-type de 3,2 mois. La distribution des âges étant normale, évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots

(1) Avant 10 mois.
(2) Après 18 mois.
(3) Entre 8 et 12 mois.

EXERCICE 2:

Les mesures de la fonction de distribution des électrons dans le plasma à décharge gazeuse dans l'hydrogène ont montré qu'elle est maxwellienne, la température des électrons étant *T=30000 K*. quelle partie d'électrons est-elle capable dans ces conditions d'ionisé les atomes d'hydrogène neutres dont l'énergie d'ionisation est $\mathcal{E}_i = 13{,}5\ eV$?

On donne la fonction d'erreur $\phi(x_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_0} e^{-x^2} dx$

EXERCICE 3:

La densité de probabilité de maxwell pour les composantes d'impulsions est :

$$w_{p_i} dp_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_0 KT}} e^{-p_i^2/2m_0KT} dp_i \quad avec \quad i = x\ ,\ y\ \ ou\ \ z$$

1. Trouver la densité de probabilité de maxwell pour que la molécule ait une impulsion quelconque $\vec{p}$.
2. Calculer la valeur moyenne de p_i et p_i^2.
3. Trouver la densité de probabilité de maxwell pour le module de l'impulsion.
4. Pour une température donnée *T* trouver la valeur moyenne et la valeur la plus probable du module d'impulsion.

Corrigé type de l'Epreuve de Physique Statistique 2016

EXERCICE 1:

Age moyen, $< A > = 11.5\ mois$

Ecart-type, $\sqrt{D} = 3.2\ mois$

1. La proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots avant 10 mois, $A < 10$.

On cherche la probabilité pour que $A < 10$, on utilise la loi normale réduite avec

$$z = \frac{A - < A >}{\sqrt{D}} = \frac{10 - 11.5}{3.2} = -0.468$$

Puisque la loi normale réduite est symétrique alors

$$P(A < 10) = P(z < -0.468) = P(z > 0.468)$$

D'après le tableau de la loi normale réduite

$$P(z > 0.468) = 1 - P(z < 0.468) = 1 - 0.6808 = 0.3192$$

Alors la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots avant 10 mois est

$$\boxed{P(A < 10) = 31.92\%}$$

2. la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots après 18 mois, $A > 18$.

$$z = \frac{A - < A >}{\sqrt{D}} = \frac{18 - 11.5}{3.2} = 2.031$$

$$P(A > 18) = P(z > 2.031) = 1 - P(z < 2.031) = 1 - 0.9788 = 0.0212$$

Alors la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots après 18 mois est

$$\boxed{P(A > 18) = 2.12\%}$$

3. la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots entre 8 et 12 mois $8 < A < 12$.

$$z = \frac{A - < A >}{\sqrt{D}} = \frac{8 - 11.5}{3.2} = -1.093$$

$$z = \frac{A - < A >}{\sqrt{D}} = \frac{12 - 11.5}{3.2} = 0.156$$

$$\begin{aligned} P(8 < A < 12) &= P(-1.093 < z < 0.156) \\ &= P(z < 0.156) - P(z < -1.093) \\ &= P(z < 0.156) - P(z > 1.093) \\ &= P(z < 0.156) - [1 - P(z < 1.093)] \\ &= 0.5596 - (1 - 0.8621) \end{aligned}$$

$$P(8 < A < 12) = 0.4217$$

$$\boxed{P(8 < A < 12) = 42.17\%}$$

EXERCICE 2:

La partie d'électrons capable d'ionisé les atomes d'hydrogène neutres, est la partie d'électrons dont l'énergie de chaque électron est : $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_i \quad avec \quad \mathcal{E}_i = 13{,}5\ eV$.

Soit N le nombre total d'électrons, alors le nombre d'électrons ayant une énergie $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_i$ est :

$$n = W_{\varepsilon \geq \varepsilon_i} \cdot N$$

Il faut calculer alors, $W_{\varepsilon \geq \varepsilon_i}$

$$W_{\varepsilon \geq \varepsilon_i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} \int_{\varepsilon_i}^{+\infty} \sqrt{\varepsilon}\, e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

On pose

$$\frac{\varepsilon}{KT} = x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{KT}} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varepsilon}{KT} = 2xdx$$

D'où

$$W_{\varepsilon \geq \varepsilon_i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(KT)^{3/2}} \int_{x_i}^{+\infty} \sqrt{KT}\, x\, e^{-x^2}\ 2KT\ x\ dx = \boxed{\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{x_i}^{+\infty} x^2\, e^{-x^2} dx}$$

$$d(e^{-x^2}) = -2xe^{-x^2} dx$$

$$W_{\varepsilon \geq \varepsilon_i} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{x_i}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) x\ d\left(e^{-x^2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_i}^{+\infty} x\ d\left(e^{-x^2}\right)$$

$$W_{\varepsilon \geq \varepsilon_i} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left[x\, e^{-x^2}\right]_{x_i}^{+\infty} - \int_{x_i}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx \right\}$$

$$W_{\varepsilon \geq \varepsilon_i} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(-x_i\, e^{-x_i^2}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx - \int_0^{x_i} e^{-x^2}\ dx \right\}$$

$$W_{\varepsilon \geq \varepsilon_i} = +\frac{2}{\sqrt{\pi}}\ x_i\, e^{-x_i^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_i} e^{-x^2}\ dx$$

$$\boxed{W_{\varepsilon \geq \varepsilon_i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\ x_i\, e^{-x_i^2} + 1 - \Phi(x_i)} \qquad avec \qquad \Phi(x_i) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_i} e^{-x^2}\ dx$$

$$x_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{KT}} = \sqrt{\frac{13{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^4}} = 2{,}29$$

$Vu\ que\ \ x_i > 1$

$$\boxed{\Phi(x_i) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \frac{1}{x_i}\ e^{-x_i^2} + \int_{x_i}^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-x^2}\ dx}$$

L'intégrale $\int_{x_i}^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-x^2}\, dx$, peut être négligée

$$W_{\varepsilon\geq\varepsilon_i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\; x_i\, e^{-x_i{}^2} + 1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \frac{1}{x_i}\; e^{-x_i{}^2}\right)$$

$$W_{\varepsilon\geq\varepsilon_i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\; x_i\, e^{-x_i{}^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \frac{1}{x_i}\; e^{-x_i{}^2}$$

$$W_{\varepsilon\geq\varepsilon_i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\; 2{,}29\, e^{-(2{,}29)^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \frac{1}{2{,}29}\; e^{-(2{,}29)^2}$$

$$\boxed{W_{\varepsilon\geq\varepsilon_i} = 0.015 \qquad c\text{-}a\text{-}d \quad 1{,}5\%}$$

Donc la partie d'électrons capable d'ionisé les atomes d'hydrogène neutres forme 1,5% du nombre total d'électrons.

<u>EXERCICE 3</u>:

La densité de probabilité de maxwell pour les composantes d'impulsions est :

$$w_{p_i} dp_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_0 KT}} e^{-p_i^2/2m_0KT} dp_i \qquad avec \qquad i = x\ ,\ y\ \ ou\ \ z$$

1. la probabilité de maxwell pour que la molécule ait une impulsion quelconque $\vec{p}$, est la probabilité de réalisation des 3 événements indépendants d'avoir les composantes $p_x\,, p_y\,, p_z$, donc

$$W_{\vec{p}} = W_{p_x} \cdot W_{p_y} \cdot W_{p_z} \Rightarrow w_{\vec{p}} d^3p = w_{p_x} dp_x \cdot w_{p_y} dp_y \cdot w_{p_z} dp_z$$

$$\boxed{w_{\vec{p}} d\Omega = w_{p_x} \cdot w_{p_y} \cdot w_{p_z} dp_x dp_y dp_z = \frac{1}{(2\pi m_0 KT)^{3/2}}\; e^{-p^2/2m_0KT} d\Omega}$$

2. <u>Calculer la valeur moyenne de</u> p_i et p_i^2.

$$< p_i > = \int_{-\infty}^{+\infty} p_i\, w_{p_i} dp_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_0 KT}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p_i^2/2m_0KT} dp_i = 0$$

$$< p_i{}^2 > = \int_{-\infty}^{+\infty} p_i{}^2\, w_{p_i} dp_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_0 KT}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2m_0KT)^{-3/2} = m_0 KT$$

3. la densité de probabilité de maxwell pour le module de l'impulsion.
   $w_{\vec{p}} d\Omega$ en coordonnées sphérique

$$w_{\vec{p}} d\Omega = \frac{1}{(2\pi m_0 KT)^{3/2}} \; e^{-p^2/2m_0KT} \; p^2 \; sin\theta \; dp \; d\theta \; d\varphi$$

On intègre par rapport à $d\theta \;\; et \; d\varphi$

$$\int w_{\vec{p}} d\Omega = \frac{1}{(2\pi m_0 KT)^{3/2}} \; e^{-p^2/2m_0KT} \; p^2 \; dp \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta \;\; d\theta$$

$$\boxed{w_p dp = \frac{4\pi \, p^2}{(2\pi m_0 KT)^{\frac{3}{2}}} \; e^{-p^2/2m_0KT} \;\; dp}$$

4. <u>la valeur moyenne et la valeur la plus probable du module d'impulsion. Pour une température donnée *T*</u>

$$< \; p \; >= \int_0^{+\infty} p \, w_p dp \quad = \frac{4\pi}{(2\pi m_0 KT)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} p^3 e^{-p^2 \,/2m_0KT} dp \; = 0$$

On pose

$$x = \frac{p^2}{2m_0KT} \qquad \Rightarrow \qquad pdp = m_0KT \; dx$$

$$< \; p \; > = \sqrt{\frac{8m_0KT}{\pi}}$$

<u>la valeur la plus probable du module d'impulsion</u> $\quad p_{p.\;prob}$ =?
C'est la valeur ou la densité de probabilité est maximale c-a-d

$$\frac{dW_p}{dp} = 0 \quad on\; trouve \;\; 2p - \frac{p^3}{m_0KT} = 0$$

$$p_{p.\;prob} \;\; = \;\; \sqrt{2m_0KT}$$