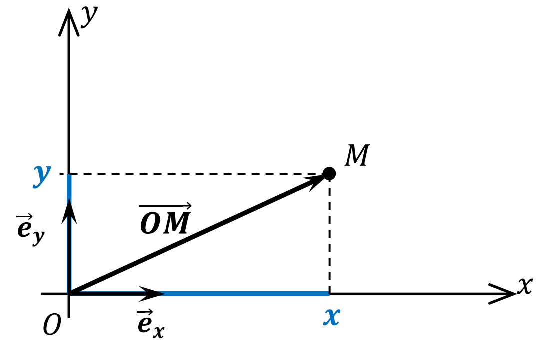
FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRIE CIRCULAIRE ET HYPERBOLIQUE

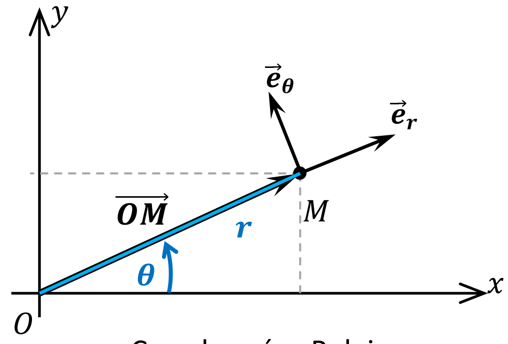
CIRCULAIRE	HYPERBOLIQUE
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{cotan}\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$	$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$
$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$ En utilisant $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i.\sin(\alpha)$. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,.\tan\beta}$ En remplaçant β par $-\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$ $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\,.\tan\beta}$	$\cosh(\alpha) = \cosh(-\alpha)$ $\sinh(\alpha) = -\sinh(-\alpha)$ En utilisant $e^{a+b} = e^a e^b$. $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$ $\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$ $\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a\,.\tanh b}$ En remplaçant b par $-b$ $\cosh(a-b) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)$ $\sinh(a-b) = \sinh(a)\cosh(b) - \cosh(a)\sinh(b)$ $\tanh(a-b) = \dfrac{\tanh a - \tanh b}{1 - \tanh a\,.\tanh b}$
$\cos(2\alpha) = \begin{Bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\sin^2\alpha \end{Bmatrix} = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	$\cosh(2a) = \begin{Bmatrix} \cosh^2 a + \sinh^2 a \\ 2\cosh^2 a - 1 \\ 1 + 2\sinh^2 a \end{Bmatrix} = \dfrac{1+\tanh^2 a}{1-\tanh^2 a}$ $\sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(a) = \dfrac{2\tanh a}{1-\tanh^2 a}$ $\tanh(2a) = \dfrac{2\tanh a}{1+\tanh^2 a}$
$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$	$\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ $\cosh(a) - \cosh(b) = 2\sinh\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ $\sinh(a) + \sinh(b) = 2\sinh\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ $\sinh(a) - \sinh(b) = 2\sinh\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
<u>DÉRIVÉES</u> $(\cos(\alpha))' = -\sin(\alpha)$ $(\sin(\alpha))' = \cos(\alpha)$ $(\tan(\alpha))' = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ $(\operatorname{cotan}(\alpha))' = \dfrac{-1}{\sin^2\alpha} = -1 - \operatorname{cotan}^2\alpha$	<u>DÉRIVÉES</u> $(\cosh(x))' = \sinh(x)$ $(\sinh(x))' = \cosh(x)$ $(\tanh(x))' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ $(\operatorname{cotanh}(x))' = \dfrac{1}{\sinh^2 x} = -1 + \operatorname{cotanh}^2 x$

SYSTÈMES DE COORDONNÉES

DANS LE PLAN

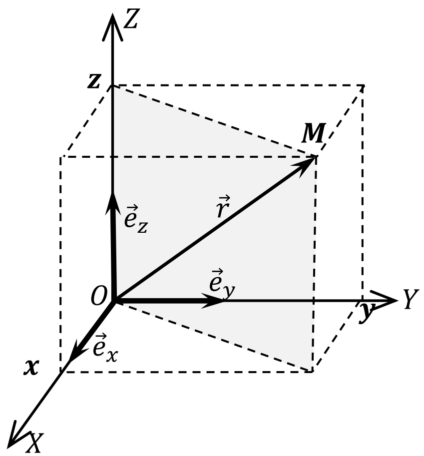


Coordonnées Cartésiennes

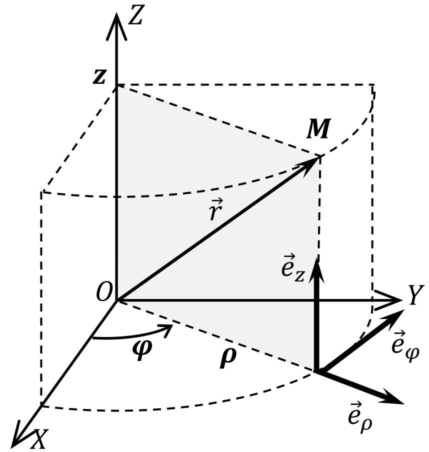


Coordonnées Polaires

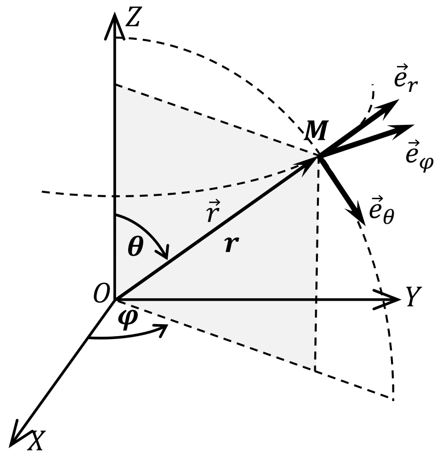
DANS L'ESPACE



Coordonnées Cartésiennes



Coordonnées Cylindriques



Coordonnées Sphériques

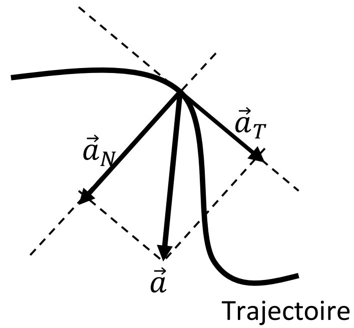
CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

Coordonnées	Cartésiennes (x, y, z)	Cylindriques (ρ, φ, z)	Sphériques (r, θ, φ)
Relation entre les coordonnées	$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$	$\begin{cases} \boldsymbol{x = \rho.cos(\varphi)} \\ \boldsymbol{y = \rho.sin(\varphi)} \\ \boldsymbol{z = z} \end{cases}$	$\begin{cases} x = r.\sin(\theta).\cos(\varphi) \\ y = r.\sin(\theta).\sin(\varphi) \\ z = r.\cos(\theta) \end{cases}$
Relation entre les vecteurs unitaires	$\begin{cases} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{cases}$	$\begin{cases} \boldsymbol{\vec{e}_\rho = cos(\varphi).\vec{e}_x + sin(\varphi).\vec{e}_y} \\ \boldsymbol{\vec{e}_\varphi = -sin(\varphi).\vec{e}_x + cos(\varphi).\vec{e}_y} \\ \boldsymbol{\vec{e}_z = \vec{e}_z} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin(\theta).\cos(\varphi).\vec{e}_x + \sin(\theta).\sin(\varphi).\vec{e}_y + \cos(\theta).\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos(\theta).\cos(\varphi).\vec{e}_x + \cos(\theta).\sin(\varphi).\vec{e}_y - \sin(\theta).\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi.\vec{e}_x + \cos\varphi.\vec{e}_y \end{cases}$
Position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$	$\vec{r} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z$	$\vec{r} = \rho.\vec{e}_\rho + z.\vec{e}_z$	$\vec{r} = r.\vec{e}_r$
Déplacement $d\vec{r}$	$d\vec{r} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$	$d\vec{r} = d\rho.\vec{e}_\rho + \rho.d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z$	$d\vec{r} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta.d\varphi.\vec{e}_\varphi$
Vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{v} = x^{\bullet}.\vec{e}_x + y^{\bullet}.\vec{e}_y + z^{\bullet}.\vec{e}_z$	$\vec{v} = \rho^{\bullet}.\vec{e}_\rho + \rho.\varphi^{\bullet}.\vec{e}_\varphi + z^{\bullet}.\vec{e}_z$	$\vec{v} = r^{\bullet}.\vec{e}_r + r.\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta.\varphi^{\bullet}.\vec{e}_\varphi$
Accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{a} = x^{\bullet\bullet}.\vec{e}_x + y^{\bullet\bullet}.\vec{e}_y + z^{\bullet\bullet}.\vec{e}_z$	$\vec{a} = (\rho^{\bullet\bullet} - \rho.\varphi^{\bullet 2}).\vec{e}_\rho + (2\rho^{\bullet}.\varphi^{\bullet} + \rho.\varphi^{\bullet\bullet}).\vec{e}_\varphi + z^{\bullet\bullet}.\vec{e}_z$	$\vec{a} = (r^{\bullet\bullet} - r\theta^{\bullet 2} - r\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta).\vec{e}_r + (2r^{\bullet}\theta^{\bullet} + r\theta^{\bullet\bullet} - r\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta).\vec{e}_\theta + (2r^{\bullet}\varphi^{\bullet}\sin\theta + 2r\theta^{\bullet}\varphi^{\bullet}\cos\theta + r\varphi^{\bullet\bullet}\sin\theta).\vec{e}_\varphi$

Composantes intrinsèques du vecteur accélération :

$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N}$ et $\boxed{a^2 = a_T^2 + a_N^2}$

$a_N = \frac{v^2}{R}$	accélération normale : mesure le changement de la direction de $\vec{v}$	R : rayon de courbure de la trajectoire
$a_T = \frac{dv(t)}{dt}$	accélération tangentielle : mesure le changement du module de $\vec{v}$	Dérivée du module de la vitesse



DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

LOIS FONDAMENTALES (LOIS DE NEWTON)

1ère loi (Principe d'inertie) : La quantité de mouvement est définie par $\boxed{\vec{p} = m.\vec{v}}$

Pour un système isolé il y a conservation de la quantité de mouvement $\vec{p} = \text{constante}$

2ème loi (Principe Fondamental de la Dynamique) : Définition newtonienne de la force. $\boxed{\vec{F} = d\vec{p}/dt = m.\vec{a}}$

3ème loi (Principe de l'action et de la réaction) : Dans un système isolé composé de N corps. $\boxed{\vec{F}_1 = -\sum_{i=2}^{N} \vec{F}_{i1}}$

LOIS DE FORCES

FORCES		ORIGINE DE LA FORCE	EXPRESSION	DIRECTION	SENS	GRANDEURS CARACTERISTIQUES
Force de gravité	***Loi d'attraction universelle***	Entre deux corps de masses m_1 et m_2 séparés par une distance r.	$F = G\dfrac{m_1.m_2}{r^2}$	Droite passant par les centres de masses des deux corps.	Attractive.	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ [MKSA]$ Constante d'attraction universelle.
	Au voisinage de la terre (Poids)	Entre un corps de masse m et la terre de masse $m_T = 5{,}972 \times 10^{24}\ kg$.	$\vec{P} = m.\vec{g}$	Verticale.	Vers le bas.	$g = G\, m_T/R_T^2 \approx 9{,}81\ m/s^2$ $R_T = 6{,}371 \times 10^6\ m$
Force de contact		Entre deux surfaces solides en contact.	Pas d'expression.	perpendiculaire aux surfaces en contact.	Répulsive	Répulsion entre électrons périphériques des surfaces.
Forces de frottements	***Frottement solide–solide***	Entre deux surfaces en contact et en mouvement l'une par rapport à l'autre.	$F_f = \mu.C$	Parallèle aux surfaces en contact.	Opposée au mouvement.	μ : est le coefficient de frottement (sans unité)
	Frottement solide–fluide Force visqueuse	Pour un solide en mouvement dans un milieu fluide.	$\vec{F}_f = -k.\eta.\vec{v}$	Parallèle à la vitesse.	Opposée au sens du mouvement.	η : coefficient de viscosité du milieu. k : est un facteur exprimant la forme du corps solide (sphère : $k = 6\pi R$).
Force élastique		Origine électromagnétique. Forces de liaisons atomiques.	$\vec{F}_{\text{élast}} = -k.\vec{x}$	Parallèle à l'axe du ressort.	Opposée à la déformation.	x : élongation du ressort. k : constante de raideur $(k > 0)$.
Pseudo force d'inertie		Origine non matérielle. Pour un référentiel accéléré.	$\vec{F}' = -m.(\vec{a}_e + \vec{a}_c)$			$\vec{a}_e$: accélération d'emportement. $\vec{a}_c$: accélération de Coriolis.

MOMENT CINÉTIQUE

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE POUR UN POINT MATÉRIEL

POINT MATÉRIEL DE MASSE m.	CAS GÉNÉRAL.	MOUVEMENT CIRCULAIRE DE RAYON R ET DE CENTRE O.	FORCE CENTRALE.
Moment cinétique $\vec{L}$ par rapport au point O.	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m.\vec{r} \times \vec{v}$ $\vec{r}$ position du point matériel par rapport à O.	$\vec{L} = I.\vec{\omega}$ $I = m.R^2$ est le moment d'inertie du point matériel.	$\vec{L} =$ constante
Vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$	$\vec{\omega} = \theta^{\bullet}.\vec{u}$ $\vec{u}$: vecteur unitaire perpendiculaire au plan de rotation.	$\begin{cases} \text{Module : } \lvert\vec{\omega}\rvert = \lvert\theta^{\bullet}\rvert \\ \text{Direction : } \perp \text{ au plan du mouvement.} \\ \text{Sens : Règle de la main droite (sens de rotation)} \end{cases}$	
Moment de la résultante des forces $(\vec{F} = m\vec{a})$.	$\vec{M}(\vec{F}) = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\vec{M}(\vec{F}) = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I.\vec{\gamma}$ $(\vec{\gamma} = \theta^{\bullet\bullet}.\vec{u})$ vecteur accélération angulaire.	$\vec{M}(\vec{F}) = \vec{0}$ ($\vec{F}$ parallèle à $\vec{r}$)
Théorème du moment cinétique		$\vec{M}(\vec{F}) = \sum \vec{M}(\vec{f_i}) = \vec{r} \times \vec{F} = I.\vec{\gamma}$	

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE POUR UN SOLIDE INDÉFORMABLE

Dans le cas de la rotation d'un solide indéformable autour d'un ***axe de symétrie*** (Δ) passant par son centre de masse :

$$\boxed{\sum \vec{M}(\vec{f_i}) = I_{(\Delta)}.\vec{\gamma}}$$

Où $I_{(\Delta)}$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Δ).

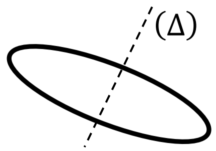
Théorème de HUYGENS :

Le moment d'inertie d'un solide indéformable de masse m par rapport à un axe (Δ') ***parallèle à un axe de symétrie*** (Δ) passant par son centre de masse :

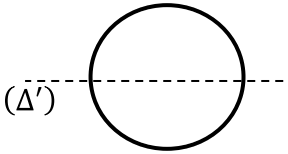
$$\boxed{I_{(\Delta')} = I_{(\Delta)} + m.D^2}$$

Tel que $D = d\left(I_{(\Delta')}, I_{(\Delta)}\right)$ est la distance séparant les deux axes.

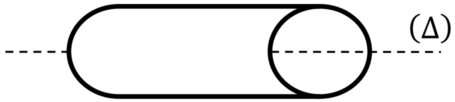
MOMENT D'INERTIE POUR QUELQUES SOLIDES USUELS



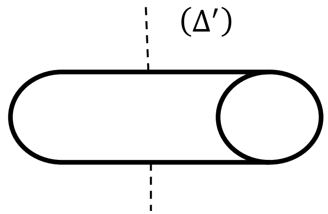
Anneau (M, R) : $I_{(\Delta)} = M.R^2$



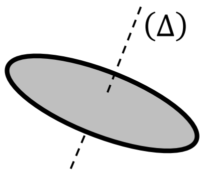
Anneau (M, R) : $I_{(\Delta')} = \frac{1}{2} M.R^2$



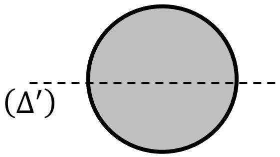
Cylindre creux (M, R, L) : $I_{(\Delta)} = M.R^2$



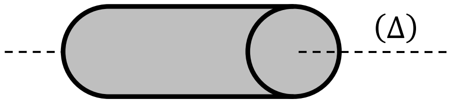
Cylindre creux (M, R, L) : $I_{(\Delta')} = \frac{1}{2} M.R^2 + \frac{1}{12} M.L^2$



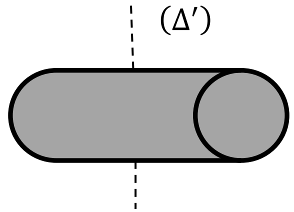
Disque (M, R) : $I_{(\Delta)} = \frac{1}{2} M.R^2$



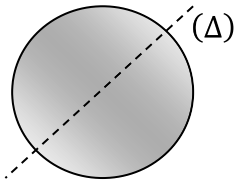
Disque (M, R) : $I_{(\Delta')} = \frac{1}{4} M.R^2$



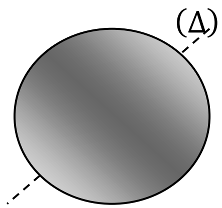
Cylindre plein (M, R, L) : $I_{(\Delta)} = \frac{1}{2} M.R^2$



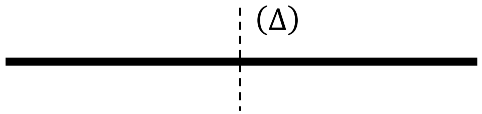
Cylindre creux (M, R, L) : $I_{(\Delta')} = \frac{1}{4} M.R^2 + \frac{1}{12} M.L^2$



Sphère creuse (M, R) : $I_{(\Delta)} = \frac{2}{3} M.R^2$



Sphère pleine (M, R) : $I_{(\Delta)} = \frac{2}{5} M.R^2$



Tige (M, L) : $I_{(\Delta)} = \frac{1}{12} M.L^2$

ÉNERGIE ET TRAVAIL

	EXPRESSION	GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES	UNITÉS [MKSA]
TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE D'UNE FORCE	$dW = \vec{F} \bullet d\vec{l}$	$d\vec{l} = d\vec{r}$: déplacement élémentaire.	$N.m = Joule$
TRAVAIL D'UNE FORCE $\vec{F}$ SUIVANT UNE COURBE. (CIRCULATION)	$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l}$	A : point de départ de la trajectoire. B : point d'arrivée de la trajectoire.	
PUISSANCE (INSTANTANÉE).	$P = \frac{dW}{dt}$	Dérivée totale par rapport au temps.	$\frac{N.m}{s} = Watt$
ÉNERGIE CINÉTIQUE — **Point matériel (corps ponctuel)**	$E_c = \frac{1}{2} m.v^2$	m : masse du cops ponctuel. $\vec{v}$: vitesse du cops ponctuel.	$N.m = Joule$
ÉNERGIE CINÉTIQUE — **Solide indéformable**	$E_c = \frac{1}{2} m.v^2 + \frac{1}{2} I.\omega^2$	$\vec{v}$: vitesse du centre de masse. I : moment d'inertie du solide. ω : vitesse angulaire autours du centre de masse.	
ÉNERGIE POTENTIELLE — **Gravitationnelle** — **Attraction universelle**	$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}$	Energie potentielle de l'ensemble des deux masses m_1 et m_2 séparées par une distance r.	$N.m = Joule$
ÉNERGIE POTENTIELLE — **Gravitationnelle** — **Au voisinage de la terre**	$E_p = mgh$	En. Pot. d'un corps de masse m situé à une hauteur h d'un point de référence au voisinage de la surface de la terre.	
ÉNERGIE POTENTIELLE — **Élastique**	$E_p = \frac{1}{2} kx^2$	x : élongation du ressort. k : constante de raideur.	
ÉNERGIE POTENTIELLE — **Électrostatique**	$E_p = U = K\frac{q_1 q_2}{r}$	Energie potentielle de l'ensemble des deux charges q_1 et q_2 séparées par une distance r.	
ENERGIE MECANIQUE TOTALE	$E_T = E_c + E_p$		$N.m = Joule$
TRAVAIL DE LA RÉSULTANTE DES FORCES	$W_A^B(\vec{F}_{\text{tot}}) = \Delta E_c = \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2$		$N.m = Joule$
FORCE DÉRIVANT D'UN POTENTIEL (FORCES CONSERVATIVES)	$\vec{F}_{\text{cv}} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$ $\overrightarrow{rot}(\vec{F}_{\text{cv}}) = \vec{0}$	$E_T = E_c + E_p =$ Constante $W_A^B = \Delta E_c = -\Delta E_p$ $dW = dE_c = -dE_p$	$Newton$
TRAVAIL DES FORCES NON CONSERVATIVES	$W_A^B(\vec{F}_{\text{ncv}}) = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_T$ $dW(\vec{F}_{\text{ncv}}) = dE_c + dE_p = dE_T$	$E_T = E_c + E_p \neq$ Constante	$N.m = Joule$