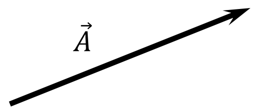
LEÇON N°01
VECTEURS ET ALGÈBRE VECTORIEL

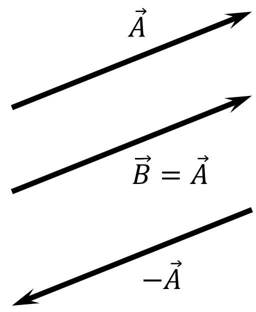
Certaines grandeurs physiques ne nécessitent qu'un nombre réel pour les calculer ou les mesurer, comme les longueurs, les masses ou les intervalles de temps. Ces quantités sont appelées ***scalaires***.
Pour d'autres grandeurs physiques il nous faut à la fois déterminer, un nombre réel dit module, une direction dans l'espace et un sens suivant cette direction. De telles grandeurs sont appelées ***grandeurs vectorielles ou vecteurs*** et sont représentées géométriquement dans l'espace euclidien à trois dimensions par un segment de droite orientée.



Un vecteur est symbolisé mathématiquement par une lettre surmontée d'une flèche ($\vec{A}$ par exemple).
La longueur du segment exprime la valeur de la grandeur $\vec{A}$ ou son ***module*** noté

$$A = |\vec{A}| = \|\vec{A}\|$$

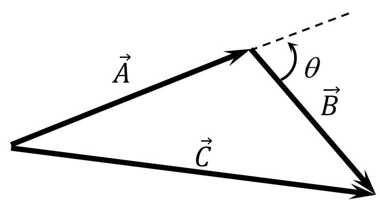
DÉFINITIONS



1. Deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont égaux s'ils ont le même module, la même direction et le même sens, quelles que soit leurs origines $(\vec{A} = \vec{B})$.

2. Un vecteur ayant le même module, la même direction que $\vec{A}$ mais le sens opposé est noté $-\vec{A}$

3. La somme (ou la résultante) de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un autre vecteur $\vec{C}$ défini comme suit :
   - $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB.cos\theta} \qquad$ avec $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$
   - le vecteur $\vec{C}$ part de l'origine du vecteur $\vec{A}$ et rejoint l'extrémité du vecteur $\vec{B}$ tout en plaçant l'origine de $\vec{B}$ sur l'extrémité de $\vec{A}$.



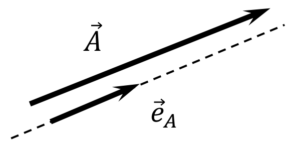
4. La différence de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est notée $\vec{A} - \vec{B}$, et elle est équivalente à la somme du vecteur $\vec{A}$ et du vecteur $(-\vec{B})$.

5. Le produit du vecteur $\vec{A}$ par un scalaire p est le vecteur $\vec{A}' = p.\vec{A} = \vec{A}.p$ tel que :
   - $|\vec{A}'| = |p|.|\vec{A}|$
   - $\vec{A}'$ à la même direction que $\vec{A}$.
   - $\vec{A}'$ a le même sens que $\vec{A}$ si p est positif et le sens opposé à $\vec{A}$ si p est négatif.

6. Le vecteur nul $\vec{0}$ est un vecteur de module égal à zéro et de direction non définie.

VECTEUR UNITAIRE

Tout vecteur dont le module est égale à l'unité (01) est dit vecteur unitaire.



Tout vecteur de l'espace euclidien peut s'écrire sous la forme

$$\vec{A} = A.\vec{e}_A$$

Où $\vec{e}_A$ est le vecteur unitaire dans la même direction et de même sens que $\vec{A}$, et A est le module du vecteur $\vec{A}$.

Démonstration :

Puisque, par définition, $\vec{A}$ et $\vec{e}_A$ sont parallèles et dans le même sens, on peut écrire

$$\vec{A} = \lambda.\vec{e}_A \qquad \text{avec} \quad \lambda \text{ est un réel positif.}$$

Pour ce qui est des modules (voir définitions).

$$|\vec{A}| = |\lambda|.|\vec{e}_A|$$

Comme le vecteur $\vec{e}_A$ est un vecteur unitaire, donc, son module est égal à l'unité $|\vec{e}_A| = 1$.
Et comme λ est positif alors, $|\lambda| = \lambda$. D'où

$$|\vec{A}| = A = \lambda$$

Et

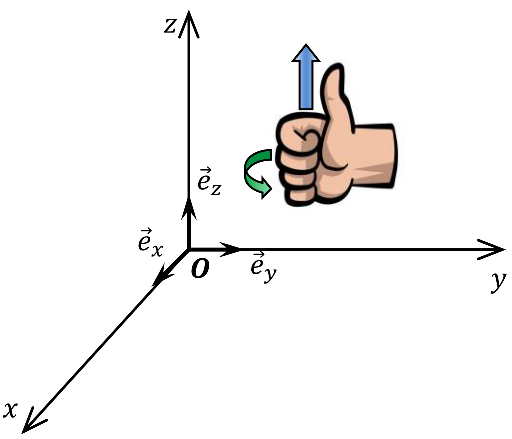
$$\vec{A} = A.\vec{e}_A \quad \text{ou bien} \quad \vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

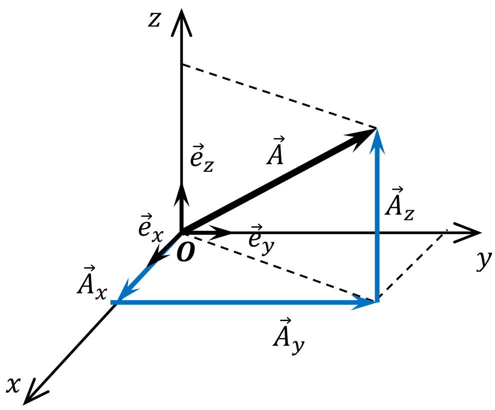
VECTEURS UNITAIRES ORTHOGONAUX

N'importe quel vecteur de l'espace euclidien peut être écrit en fonction de trois vecteurs ***linéairement indépendants*** (dans notre cas trois vecteurs non parallèles deux à deux et non coplanaires globalement).

Par convention nous appelons ***trièdre directe*** trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ linéairement indépendants ayant la même origine et obéissant à la règle de la main droite.

Pour simplifier nous considérons comme repère un ensemble de trois vecteurs unitaires formant un trièdre directe et perpendiculaires deux à deux notée $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ ou $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.
L'ensemble $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est dit ***base orthonormée***.





COMPOSANTES D'UN VECTEUR DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Tout vecteur peut être décomposé en une somme de trois vecteurs orthogonaux

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$$

Le vecteur $\vec{A}$ est aussi noté

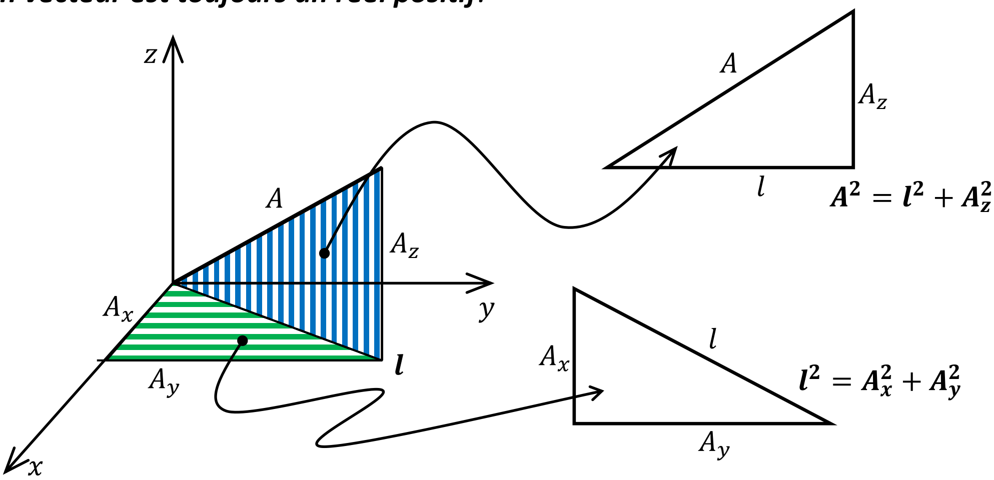
$$\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

A_x, A_y et A_z sont dits composantes du vecteur $\vec{A}$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
A_x, A_y et A_z ***sont des valeurs algébriques*** (elles peuvent être positives, négatives ou nulles).

En utilisant le théorème de Pythagore (figure ci-dessous) on trouve que le module

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Le module d'un vecteur est toujours un réel positif.



Exemple :

Les composantes de $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont

$$\vec{e}_x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{e}_y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{e}_z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et leurs modules

$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$$

Les composantes de ***la résultante*** de deux vecteurs $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ deviennent alors

$$\begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \\ C_z = A_z + B_z \end{cases}$$

Les composantes du vecteur $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$:

$$\begin{cases} D_x = A_x - B_x \\ D_y = A_y - B_y \\ D_z = A_z - B_z \end{cases}$$

Les composantes du vecteur $\vec{A}' = p.\vec{A}$:

$$\begin{cases} A'_x = p.A_x \\ A'_y = p.A_y \\ A'_z = p.A_z \end{cases}$$

Exemple :

$$\vec{A} = \vec{e}_x + 2.\vec{e}_y + 2.\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{B} = 2.\vec{e}_x - \vec{e}_y + 3.\vec{e}_z$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}' = (-3).\vec{A} = -3.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Et leurs modules

$$A = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \quad ; \quad B = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$C = \sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{35} \quad ; \quad D = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

$$A' = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{81} = 9$$

Remarquez que

$$A' = 3.A = |-3|.A$$

Et que

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad \text{mais} \qquad C \neq A + B$$

LOIS DE L'ALGÈBRE VECTORIEL

Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont des vecteurs et si p et q sont des scalaires alors :

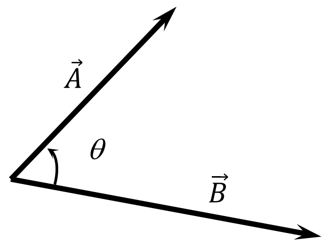
- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ loi de commutativité pour l'addition
- $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ loi d'associativité pour l'addition
- $p.(q.\vec{A}) = q.(p.\vec{A}) = (p.q).\vec{A}$ loi d'associativité pour la multiplication
- $(p + q).\vec{A} = p.\vec{A} + q.\vec{A}$ loi de distributivité
- $p.(\vec{A} + \vec{B}) = p.\vec{A} + p.\vec{B}$ loi de distributivité

Remarque :

Tout être mathématique qui obéit à ces lois est dit vecteur et l'ensemble de ces vecteurs définissent un espace vectoriel.

PRODUIT SCALAIRE

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et on note $\vec{A} \bullet \vec{B}$ le produit des modules de $\vec{A}$ et de $\vec{B}$ et du cosinus de l'angle aigu formé par les deux vecteurs.



$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A.B.\cos(\theta) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Le résultat du produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel (scalaire).

Propriétés :

- $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}.$
- $\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \vec{C}.$
- $p.(\vec{A} \bullet \vec{B}) = (p.\vec{A}) \bullet \vec{B} = \vec{A} \bullet (p.\vec{B}) = (\vec{A} \bullet \vec{B}).p.$
- Pour deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ non nuls : $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} \perp \vec{B}$
- $\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \delta_{ij} \qquad i\,;\, j = x\,;\, y\,;\, z.$

  δ_{ij} est le symbole de Kronecker-Dirac $\left(\delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j\right).$

A partir des propriétés précédentes, le produit scalaire est donné par

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z$$

Et le carré du module d'un vecteur

$$\vec{A} \bullet \vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

Exemple :

$$\vec{A} = \vec{e}_x + 2.\vec{e}_y + 2.\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{B} = 2.\vec{e}_x - \vec{e}_y + 3.\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{C} = 4.\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z$$

a. Montrer que le vecteur $\vec{A}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{C}$.

$$\vec{A} \bullet \vec{C} = A_x.C_x + A_y.C_y + A_z.C_z = 1.4 + 2.(-1) + 2.(-1)$$

$$\vec{A} \bullet \vec{C} = 0 \quad \text{donc les deux vecteurs sont perpendiculaires} \quad (\vec{A} \perp \vec{C})$$

b. Calculer l'angle formé par les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z = 1.2 + 2.(-1) + 2.3 = 6$$

D'autre part

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A.B.\cos(\theta) \quad \text{avec} \quad A = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{et} \quad B = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

En comparant

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{A.B} = \frac{6}{3\sqrt{14}} \qquad \text{donc} \qquad \cos(\theta) = 0.535 \qquad \text{et} \qquad \theta = 57{,}69°.$$

PRODUIT VECTORIEL

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C}$ noté $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$.

- Le module de $\vec{C}$ est donné par : $C = A.B.sin(\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$
- La direction de $\vec{C}$, donnée par le vecteur unitaire $\vec{u}$, est perpendiculaire au plan sous tendu par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
- Le sens de $\vec{C}$ est donné par la règle de la main droite, tel que $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est un trièdre direct.

Donc :

$$\vec{C} = A.B.\sin(\theta).\vec{u} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Propriétés

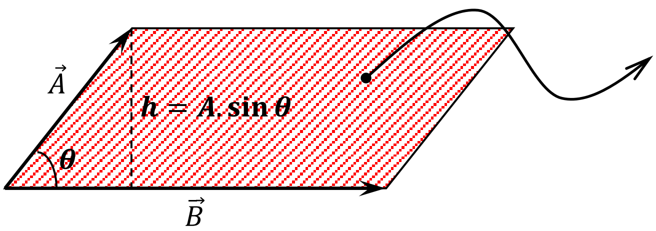
- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.
- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$.
- $p.(\vec{A} \times \vec{B}) = (p.\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (p.\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B}).p$.
- Pour deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ non nuls : $\vec{A} \times \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} \parallel \vec{B}$
- Quelque soit le vecteur $\vec{A}$ nous avons $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$.
- $\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$; $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$; $\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$; $\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$.

A partir des propriétés précédentes, le produit vectoriel est donné par le déterminant :

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Autre propriété

- $|\vec{A} \times \vec{B}|$ est égal à la surface du parallélogramme de coté $\vec{A}$ et $\vec{B}$.



$S = B.h = A.B.\sin\theta$

Donc $\quad S = |\vec{A} \times \vec{B}|$

Exemple :

$$\vec{A} = \vec{e}_x + 2.\vec{e}_y + 2.\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{B} = 2.\vec{e}_x - \vec{e}_y + 3.\vec{e}_z$$

Calculer le produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_z$$

Donc

$$\vec{A} \times \vec{B} = 8.\vec{e}_x + 1.\vec{e}_y - 5.\vec{e}_z$$

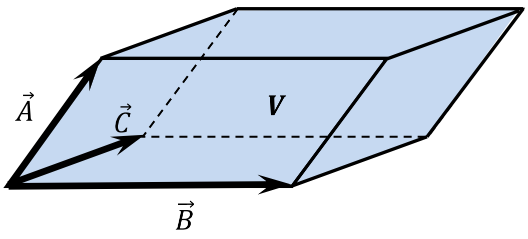
PRODUIT MIXTE

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ ***est un scalaire***, il est donné par (à démontrer) :

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Propriétés :

- $\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet (\vec{C} \times \vec{A})$
- $\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \pm V$ (V étant le volume du parallélépipède de cotés $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$)
  - Le signe $(+)$ si $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ forment un trièdre direct.
  - Le signe $(-)$ si $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ ne forment pas un trièdre direct.
- Si les trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ appartiennent au même plan, alors $\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$.



Exemple :

$$\vec{A} = \vec{e}_x + 2.\vec{e}_y + 2.\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{B} = 2.\vec{e}_x - \vec{e}_y + 3.\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{C} = \alpha.\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z$$

Trouver α pour que les trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ appartiennent au même plan.

Pour que $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ appartiennent au même plan il faut que : $\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

Donc

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ \alpha & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

D'où

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}.1 - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & -1 \end{vmatrix}.2 + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \alpha & -1 \end{vmatrix}.2 = 0$$

$$4 - (-2 - 3.\alpha).2 + (-2 + \alpha).2 = 4 + 8.\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = -1/2$$

DOUBLE PRODUIT VECTORIEL

Le double produit vectoriel de trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$ ***est un vecteur*** noté $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$.

Propriétés :

- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}.(\vec{A} \bullet \vec{C}) - \vec{C}.(\vec{A} \bullet \vec{B})$

Attention :

- En général $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$.