LEÇON N°02

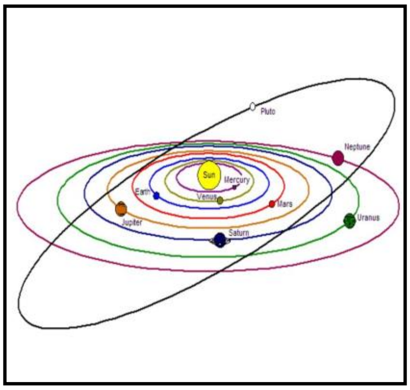
LE MOUVEMENT PLAN

On parle de mouvement plan quand la trajectoire du point matériel est une courbe qui peut être contenue dans un plan.

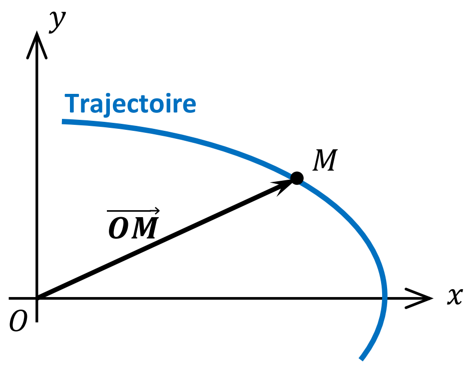
Le mouvement des centres de masse des planètes dans le système solaire est plan, car la trajectoire est une ellipse dont un des foyers est le soleil (lois de Kepler).

Le mouvement d'un projectile dans le champ de gravitation terrestre est une courbe dans le plan vertical (au voisinage de la terre, et pour des frottements négligeables, cette courbe est un arc de parabole).

Le pendule simple oscille toujours dans le même plan, la masse ponctuelle dans ce cas décrit un arc de cercle (dans le champ gravitationnel terrestre).



Pour étudier le mouvement dans le plan, on se dote d'un référentiel composé d'une origine des espaces O et de deux axes (Ox) et (Oy). Ce référentiel est noté (Oxy).



Le vecteur position est noté :

$$\overrightarrow{OM}(t)$$

Le vecteur vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

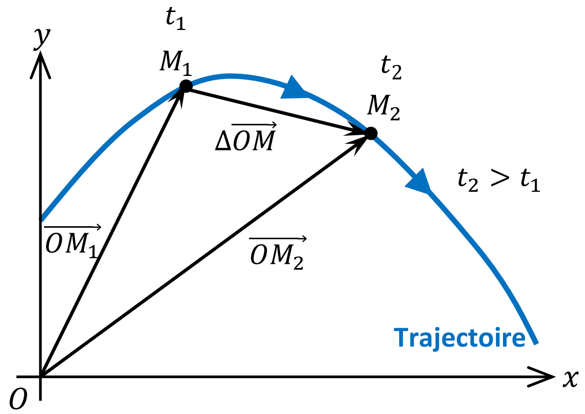
$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

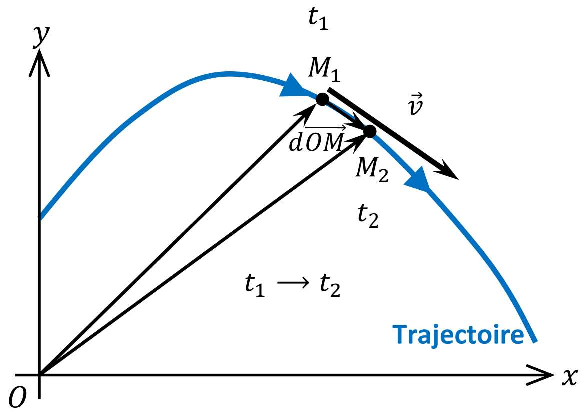
Le vecteur accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

PROPRIÉTÉ DES VECTEURS VITESSES ET ACCÉLÉRATION

Propriété du vecteur vitesse





Vecteur déplacement :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1$$

La directrice du vecteur déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$ coupe la trajectoire aux points M_1 et M_2. Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est orienté dans le sens du mouvement.

Quand $t_1 \longrightarrow t_2$ le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ est tangent à la trajectoire et dans le sens du déplacement du mobile.

Le vecteur vitesse

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1}{t_2 - t_1}$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ est parallèle et dans le même sens que le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$.

Donc, ***Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ est toujours tangent à la trajectoire et dans le sens du déplacement du mobile***.

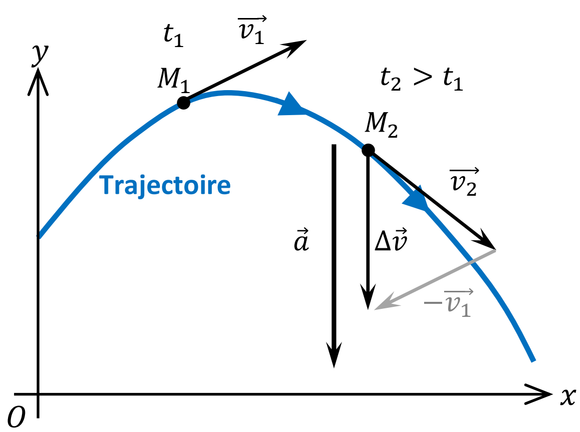
Propriété du vecteur accélération

Les vecteurs vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont toujours tangent à la trajectoire et dans le sens du déplacement du mobile.

Vecteur variation de vitesse : $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

Par construction graphique le vecteur $\Delta\vec{v}$ est toujours orienté vers l'intérieure de la courbure de la trajectoire.

Quand $t_1 \longrightarrow t_2$ le vecteur $\Delta\vec{v}$ devient $d\vec{v}$, il est toujours orienté vers l'intérieure de la courbure de la trajectoire.



Le vecteur accélération

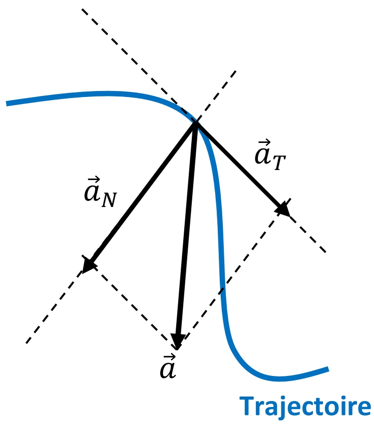
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ est parallèle et dans le même sens que le vecteur $d\vec{v}$.

Donc, ***Le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ est toujours orienté vers l'intérieure de la courbure de la trajectoire***.

COMPOSANTES INTRINSÈQUES DU VECTEUR ACCÉLÉRATION

Puisque le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ est toujours orienté vers l'intérieure de la courbure de la trajectoire. Donc $\vec{a}(t)$ peut être décomposé en deux vecteurs :



$\vec{a}_T$: accélération tangentielle.
$\vec{a}_N$: accélération normale.

En vecteurs	$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$
En module	$a^2 = a_T^2 + a_N^2$
$a_T = \dfrac{dv(t)}{dt}$	L'accélération tangentielle mesure le changement du module de $\vec{v}$. (Dérivée du module de la vitesse)
$a_N = \dfrac{v^2}{R}$	L'accélération normale mesure le changement de la direction de $\vec{v}$. R est le rayon de courbure de la trajectoire.

Démonstration :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v(t).\vec{e}_T) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{e}_T + v(t)\frac{d\vec{e}_T}{dt}$$

$\vec{e}_T$ est *le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement* $(\vec{e}_T = \vec{v}/v)$.

Cherchons la dérivée du vecteur unitaire $\vec{e}_T$.

Ce vecteur peut être projeté sur les axes (Ox) et (Oy) :

$$\vec{e}_T = \cos\phi \,.\, \vec{e}_x + \sin\phi \,.\, \vec{e}_y$$

Tel que ϕ est l'angle compris entre l'axe (Ox) et le vecteur $\vec{e}_T$.

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{d\vec{e}_T}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \phi^{\bullet}.\vec{e}_N$$

Avec $\phi^{\bullet}$ est ***la vitesse angulaire de rotation du vecteur*** $\vec{e}_T$.

$$\vec{e}_N = -\sin\phi \,.\, \vec{e}_x + \cos\phi \,.\, \vec{e}_y$$

est ***le vecteur unitaire normale à la trajectoire*** $(\vec{e}_N \bullet \vec{e}_T = 0)$.

Accélération tangentielle :

L'accélération tangentielle est la dérivée du module de la vitesse.

$$a_T = \frac{dv(t)}{dt}$$

Le vecteur accélération tangentielle est parallèle à $\vec{e}_T$. Donc :

$$\vec{a}_T = a_T.\vec{e}_T = \frac{dv(t)}{dt}\vec{e}_T$$

Accélération normale :

Le terme $v(t).\vec{e}_T^{\bullet} = v(t)\phi^{\bullet}.\vec{e}_N$ représente l'accélération normale.
Puisque $\phi^{\bullet}$ est la vitesse angulaire de rotation du mobile, alors : $v = R\phi^{\bullet}$

R est ***le rayon de courbure de la trajectoire au point*** M. Il est égal au rayon du cercle tangent à la trajectoire au point M. (Voir figure ci-dessous)
D'où :

$$\vec{a}_N = a_N.\vec{e}_N = v\phi^{\bullet}\vec{e}_N = \frac{v^2}{R}\vec{e}_N$$

Des deux termes précédents, on peut écrire :

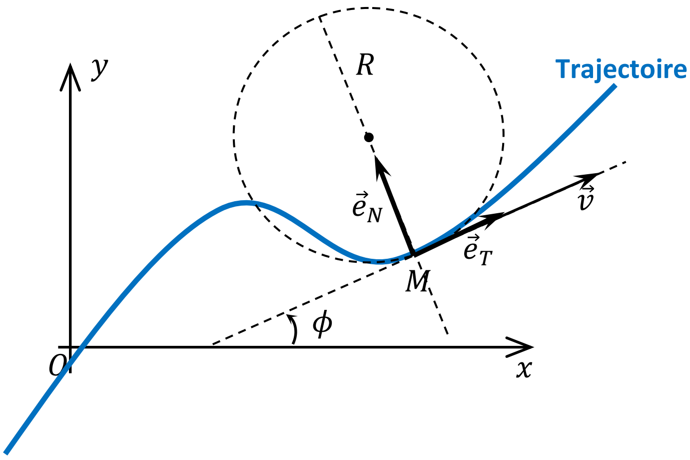
$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = a_T.\vec{e}_T + a_N.\vec{e}_N$$

Avec

$$a_T = \frac{dv(t)}{dt} \qquad \text{et} \qquad a_N = \frac{v^2}{R}$$

Les vecteurs unitaires tangent et normale à la trajectoire sont donnés par :

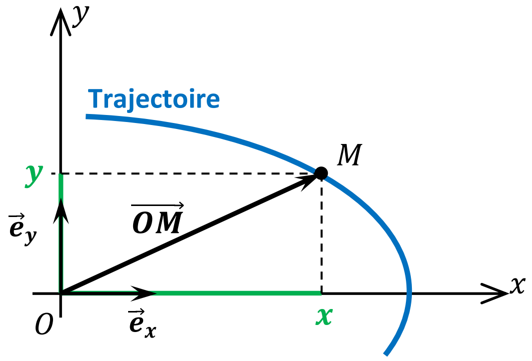
$$\vec{e}_T = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{a}_T}{a_T} \qquad \text{et} \qquad \vec{e}_N = \frac{\vec{a}_N}{a_N} \qquad \text{avec} \qquad \frac{d\vec{e}_T}{dt} = \phi^{\bullet}.\vec{e}_N$$



Remarque :

La dérivée de tout vecteur unitaire de direction variable avec le temps est égale à la vitesse angulaire de rotation de ce vecteur multipliée par le vecteur unitaire qui lui est perpendiculaire (orienté dans le sens des angles croissants).

ÉTUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES



Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x(t).\vec{e}_x + y(t).\vec{e}_y$$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = x^{\bullet}(t).\vec{e}_x + y^{\bullet}(t).\vec{e}_y$$

Ou bien

$$\vec{v}(t) = v_x.\vec{e}_x + v_y.\vec{e}_y$$

Avec

$$v_x = x^{\bullet}(t) \qquad \text{et} \qquad v_y = y^{\bullet}(t)$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = x^{\bullet\bullet}(t).\vec{e}_x + y^{\bullet\bullet}(t).\vec{e}_y$$

Ou bien $\quad \vec{a}(t) = a_x.\vec{e}_x + a_y.\vec{e}_y \quad$ avec $\quad a_x = x^{\bullet\bullet}(t) \quad$ et $\quad a_y = y^{\bullet\bullet}(t)$

Equation de la trajectoire :

$$\big(x(t), y(t)\big) \quad \Rightarrow \quad y \text{ en fonction de } x : \; y = f(x)$$

Exemple :

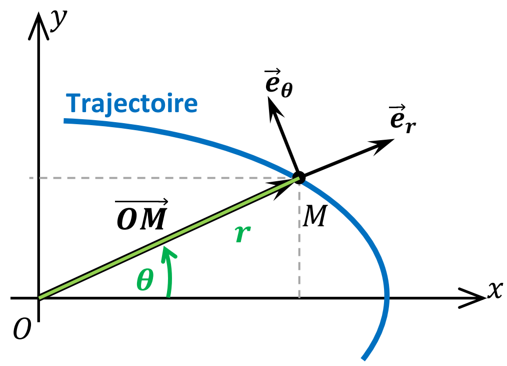
$$\begin{cases} x(t) = 5.t \\ y(t) = -5.t^2 + 5.t + 10 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \overrightarrow{OM} = (5.t).\vec{e}_x + (-5.t^2 + 5.t + 10).\vec{e}_y \\ \vec{v}(t) = (5).\vec{e}_x + (-10.t + 5).\vec{e}_y \\ \vec{a}(t) = -10.\vec{e}_y \end{cases}$$

Et l'équation de la trajectoire

$$y(x) = -(1/5).x^2 + x + 10$$

ÉTUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNÉES POLAIRES

Les coordonnées polaires sont définies par ; la distance r entre le point d'origine O et le point M où se trouve le mobile, donc r est le module du vecteur poisition $\overrightarrow{OM}$, et L'angle θ entre le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et l'axe des abscisses (Ox).



Le vecteur unitaire radial $\vec{e}_r$ est toujours parallèle et dans le même sens que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, et le vecteur unitaire transversal $\vec{e}_\theta$ est toujours perpendiculaire au vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et dans le sens des angles θ croissants.

La relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires et leurs vecteurs unitaires respectifs est donné par :

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\,.\vec{e}_x + \sin\theta\,.\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,.\vec{e}_x + \cos\theta\,.\vec{e}_y \end{cases}$$

Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Calculons les dérivées des vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \theta^\bullet\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \theta^\bullet\frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\,.\vec{e}_x + \sin\theta\,.\vec{e}_y\right) = \theta^\bullet\left(-\sin\theta\,.\vec{e}_x + \cos\theta\,.\vec{e}_y\right) = \theta^\bullet\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \theta^\bullet\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = \theta^\bullet\frac{d}{d\theta}\left(-\sin\theta\,.\vec{e}_x + \cos\theta\,.\vec{e}_y\right) = \theta^\bullet\left(-\cos\theta\,.\vec{e}_x - \sin\theta\,.\vec{e}_y\right) = -\theta^\bullet\vec{e}_r$$

Donc

$$\vec{e}_r^{\,\bullet} = \theta^\bullet.\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec{e}_\theta^{\,\bullet} = -\theta^\bullet.\vec{e}_r$$

D'où

$\vec{v}(t) = r^\bullet.\vec{e}_r + r\theta^\bullet.\vec{e}_\theta$	
Vitesse radiale $v_r = r^\bullet$	Vitesse transversale $v_\theta = r\theta^\bullet$

Vecteur accélération :

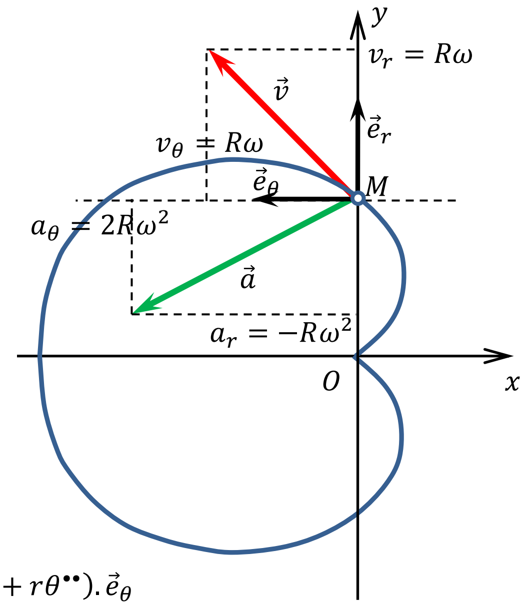
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(r^\bullet.\vec{e}_r + r.\theta^\bullet.\vec{e}_\theta)$$

$\vec{a}(t) = \left(r^{\bullet\bullet} - r\theta^{\bullet 2}\right).\vec{e}_r + (2r^\bullet\theta^\bullet + r\theta^{\bullet\bullet}).\vec{e}_\theta$	
Accélération radiale $a_r = r^{\bullet\bullet} - r\theta^{\bullet 2}$	Accélération transversale $a_\theta = 2r^\bullet\theta^\bullet + r\theta^{\bullet\bullet}$

Exemple : *Trajectoire en cardioïde.*

$$r(t) = R - R.\cos(\omega.t) \qquad \text{et} \qquad \theta(t) = \omega.t$$

1. Calculer les vecteurs : position, vitesse et accélération en coordonnées polaires.
2. Représenter les vecteurs : vitesse et accélération à $t = \pi/2\omega$.



Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r = R(1 - \cos(\omega.t)).\vec{e}_r$$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = r^\bullet.\vec{e}_r + r\theta^\bullet.\vec{e}_\theta$$

$$\vec{v}(t) = R\omega.\sin(\omega t)\,.\vec{e}_r + R\omega.(1 - \cos(\omega t)).\vec{e}_\theta$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = \left(r^{\bullet\bullet} - r\theta^{\bullet 2}\right).\vec{e}_r + (2r^\bullet\theta^\bullet + r\theta^{\bullet\bullet}).\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = R\omega^2(2\cos(\omega t) - 1).\vec{e}_r + (2R\omega^2.\sin(\omega t)).\vec{e}_\theta$$

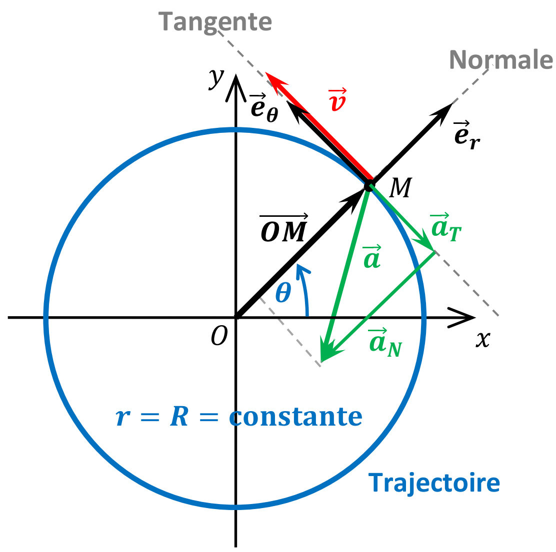
à $t = \pi/2\omega$: $\cos(\omega t) = \cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\omega t) = \sin(\pi/2) = 1$

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \pi/2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \vec{v}(t) = R\omega.\vec{e}_r + R\omega.\vec{e}_\theta \\ \vec{a}(t) = -R\omega^2.\vec{e}_r + 2R\omega^2.\vec{e}_\theta \end{cases}$$

MOUVEMENTS PLANS PARTICULIERS

Le mouvement circulaire :

Mouvement circulaire de rayon R et de centre O. $r(t) = R = \text{constante}$	
Vecteur position	$\overrightarrow{OM} = R.\vec{e}_r$
Vecteur vitesse	$\vec{v}(t) = R\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta$
Vitesse linéaire (valeur algébrique)	$v = R\theta^{\bullet}$
Vitesse angulaire (valeur algébrique)	$\theta^{\bullet} = \dfrac{v}{R}$
Vecteur accélération	$\vec{a}(t) = \left(-R\theta^{\bullet 2}\right).\vec{e}_r + (R\theta^{\bullet\bullet}).\vec{e}_\theta$
Accélération normale	$a_N = R\theta^{\bullet 2} = \dfrac{v^2}{R}$
Accélération tangentielle	$a_T = R\theta^{\bullet\bullet} = \dfrac{dv(t)}{dt}$



Le mouvement circulaire uniforme (MCU) :

$\theta^{\bullet}(t) = \text{constante}$		$v = R.\theta^{\bullet}(t) = \text{constante}$	
Position angulaire	$\theta(t) = \theta^{\bullet}.t + \theta_0$	Position curviligne	$S(t) = R.\theta(t) = V.t + S_0$
Vitesse angulaire	$\theta^{\bullet}(t) = \text{cte}$	Vitesse linéaire	$v(t) = R.\theta^{\bullet}(t) = \text{cte}$
Accélération angulaire	$\gamma(t) = \theta^{\bullet\bullet}(t) = 0$	Accélération tangentielle	$a_T(t) = R.\gamma(t) = 0$
Accélération normale	$a_N = R.\theta^{\bullet 2} = v^2/R = \text{constante}$		

Le mouvement circulaire uniformément varié (MCUV) :

$\gamma(t) = \gamma = \text{constante}$		$a_T(t) = R.\gamma(t) = \text{constante}$	
Position angulaire	$\theta(t) = \dfrac{1}{2}\gamma.t^2 + \theta_0^{\bullet}.t + \theta_0$	Position curviligne	$S(t) = \dfrac{1}{2}a_T.t^2 + V_0.t + S_0$
Vitesse angulaire	$\theta^{\bullet}(t) = \gamma.t + \theta_0^{\bullet}$	Vitesse linéaire	$v(t) = a_T.t + v_0$
Accélération angulaire	$\gamma(t) = \theta^{\bullet\bullet}(t) = \text{cte}$	Accélération tangentielle	$a_T(t) = R.\gamma(t) = \text{cte}$

Le mouvement circulaire sinusoïdal :

Position angulaire	$\theta(t) = \theta_0.\sin(\omega.t + \phi)$	Position curviligne	$S(t) = S_0.\sin(\omega.t + \phi)$
Vitesse angulaire	$\theta^{\bullet}(t) = \theta_0\omega.\sin(\omega.t + \phi)$	Vitesse linéaire	$v(t) = S_0\omega.\sin(\omega.t + \phi)$
Accél. angulaire	$\gamma(t) = -\theta_0\omega^2.\sin(\omega.t + \phi)$	Accél. tangentielle	$a_T(t) = -S_0\omega^2.\sin(\omega.t + \phi)$
$\gamma(t) = -\omega^2.\theta(t)$		$a_T(t) = -\omega^2.S(t)$	

Remarque importante :

On définit le vecteur vitesse angulaire par :

$\vec{\omega}$	Module : $\omega = \vert\theta^{\bullet}\vert$
	Direction : perpendiculaire au plan de rotation.
	Sens : donné par la règle de la main droite.

Dans le cas d'une rotation dans le plan (Oxy) on a

$$\vec{\omega} = \theta^{\bullet}.\vec{e}_z$$

On calcul les produit vectoriels suivants

$$\vec{\omega} \times \vec{e}_r = \vec{e}_r^{\bullet} = \theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta$$

$$\vec{\omega} \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta^{\bullet} = -\theta^{\bullet}.\vec{e}_r$$

La vitesse transversale

$$\vec{v}_\theta = r\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

POSITION CURVILIGNE

Nous avons vu que dans le cas d'un mouvement circulaire la position curviligne est donnée par la longueur de l'arc de cercle parcouru par le mobile mesurée à partir du point de la trajectoire S_0 où se trouvait le mobile à $t = 0\,s$. Dans ce cas :

$$S(t) = R.\theta(t) \quad ; \quad v(t) = R.\theta^{\bullet}(t) = \frac{dS(t)}{dt} \quad ; \quad a_T(t) = R.\theta^{\bullet\bullet}(t) = \frac{d^2S(t)}{dt^2}$$

Dans le cas général la trajectoire est une courbe quelconque dans le plan, la position curviligne du mobile (longueur en valeur algébrique de la portion de la courbe entre le point où se trouve le mobile et un point de référence sur la courbe) est donnée par *l'intégrale de valeur algébrique de la vitesse* :

$$S(t) = \int \bar{v}(t).dt$$

En particulier, le déplacement curviligne du mobile entre les instants t_1 et t_2 est égale à :

$$S(t_2) - S(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \bar{v}(t).dt$$

Et la position curviligne en fonction de t est donnée par :

$$S(t) - S_0 = \int_0^t \bar{v}(t).dt$$

S_0 est la position curviligne initiale, c'est-à-dire le point de la trajectoire où se trouvait le mobile à $t = 0\,s$.

La longueur de la portion de la trajectoire parcourue par le mobile est donnée par *l'intégrale du module de la vitesse* :

$$L(t) = \int v(t).dt$$