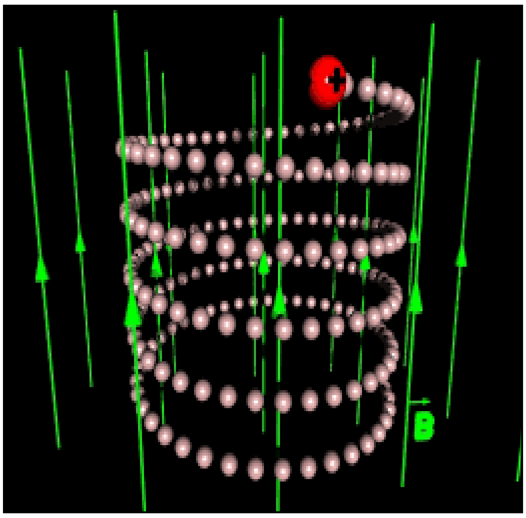
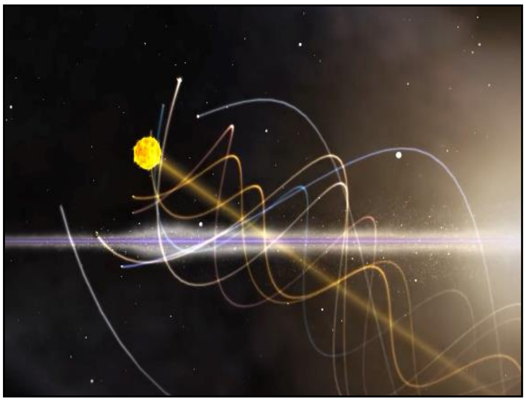
LEÇON N°03
LE MOUVEMENT DANS L'ESPACE





La trajectoire est une courbe dans l'espace. Deux exemples de mouvements, dont les trajectoires ne peuvent appartenir à un seul plan, sont donnés dans les figures ci-contre. En haut, le mouvement hélicoïdal d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme. En bas, le mouvement des planètes du système solaire, entrainée par le mouvement du soleil. Dans ce dernier cas le référentiel choisis est en dehors du système solaire (centre de la galaxie par exemple).

Le référentiel d'étude d'un mouvement dans l'espace euclidien à trois dimensions est constitué d'une origine des espaces O et de trois axes (Ox), (Oy) et (Oz) formant un trièdre directe dans cet ordre. Ce référentiel est noté $(Oxyz)$.

Rappelons les deux propriétés du vecteur vitesse et du vecteur accélération, qui restent valables (par construction) dans l'espace :

- *Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ est toujours tangent à la trajectoire et dans le sens du déplacement du mobile.*
- *Le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ est toujours orienté vers l'intérieure de la courbure de la trajectoire.*

ÉTUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Vecteur position :

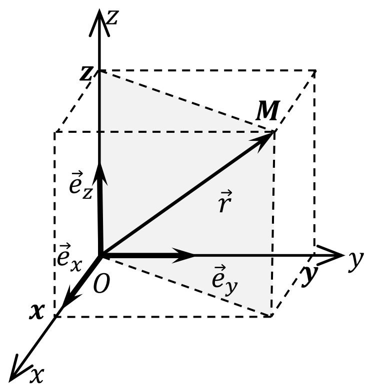
$$\overrightarrow{OM} = x(t).\vec{e}_x + y(t).\vec{e}_y + z(t).\vec{e}_z$$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = x^{\bullet}(t).\vec{e}_x + y^{\bullet}(t).\vec{e}_y + z^{\bullet}(t).\vec{e}_z$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = x^{\bullet\bullet}(t).\vec{e}_x + y^{\bullet\bullet}(t).\vec{e}_y + z^{\bullet\bullet}(t).\vec{e}_z$$



Coordonnées Cartésiennes

Exemple :

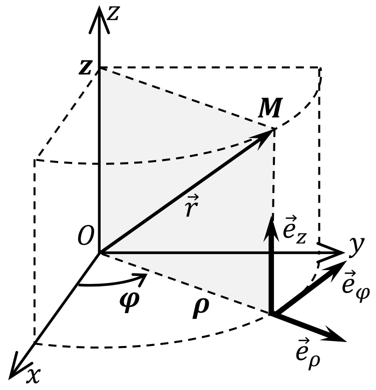
$$\begin{cases} x(t) = 5.\cos(2\pi.t) \\ y(t) = 5.\sin(2\pi.t) \\ z(t) = 10.t \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \overrightarrow{OM}(t) = [5.\cos(2\pi.t)].\vec{e}_x + [5.\sin(2\pi.t)].\vec{e}_y + [10.t].\vec{e}_z \\ \vec{v}(t) = [-10\pi.\sin(2\pi.t)].\vec{e}_x + [10\pi.\cos(2\pi.t)].\vec{e}_y + 10.\vec{e}_z \\ \vec{a}(t) = [-20\pi^2.\cos(2\pi.t)].\vec{e}_x + [-20\pi^2.\sin(2\pi.t)].\vec{e}_y \end{cases}$$

ÉTUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Les coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} x = \rho.\cos(\varphi) \\ y = \rho.\sin(\varphi) \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\,.\vec{e}_x + \sin\varphi\,.\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,.\vec{e}_x + \cos\varphi\,.\vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{e}_\rho^{\,\bullet} = \varphi^\bullet.\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_\varphi^{\,\bullet} = -\varphi^\bullet.\vec{e}_\rho \\ \vec{e}_z^{\,\bullet} = \vec{0} \end{cases}$$



Coordonnées Cylindriques

Etude du mouvement :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho.\vec{e}_\rho + z.\vec{e}_z$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \rho^\bullet.\vec{e}_\rho + \rho.\varphi^\bullet.\vec{e}_\varphi + z^\bullet.\vec{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\rho^{\bullet\bullet} - \rho\varphi^{\bullet 2}\right).\vec{e}_\rho + (2\rho^\bullet\varphi^\bullet + \rho\varphi^{\bullet\bullet}).\vec{e}_\varphi + z^{\bullet\bullet}.\vec{e}_z$$

Exemple : Le mouvement hélicoïdal (figure en début de leçon).

$$\begin{cases} \rho(t) = 5 \\ \varphi(t) = 2\pi.t \\ z(t) = 10.t \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \overrightarrow{OM}(t) = 5.\vec{e}_\rho + [10.t].\vec{e}_z \\ \vec{v}(t) = 10\pi.\vec{e}_\varphi + 10.\vec{e}_z \\ \vec{a}(t) = -20\pi^2.\vec{e}_\rho \end{cases}$$

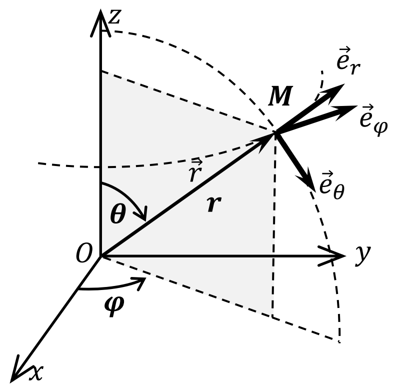
ÉTUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r.\sin\theta\,.\cos\varphi \\ y = r.\sin\theta\,.\sin\varphi \\ z = r.\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,.\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,.\vec{e}_y + \cos\theta\,.\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,.\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,.\vec{e}_y - \sin\theta\,.\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,.\vec{e}_x + \cos\varphi\,.\vec{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r^{\,\bullet} = \theta^\bullet.\vec{e}_\theta + \sin\theta.\varphi^\bullet.\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_\theta^{\,\bullet} = -\theta^\bullet.\vec{e}_r + \cos\theta.\varphi^\bullet.\vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_\varphi^{\,\bullet} = -\varphi^\bullet(\sin\theta\,.\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta) \end{cases}$$



Coordonnées Sphériques

Etude du mouvement :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r.\vec{e}_r$$

$$\vec{v}(t) = r^\bullet.\vec{e}_r + r.\theta^\bullet.\vec{e}_\theta + r\sin\theta.\varphi^\bullet.\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}(t) = \left(r^{\bullet\bullet} - r\theta^{\bullet 2} - r\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta\right).\vec{e}_r + \left(2r^\bullet\theta^\bullet + r\theta^{\bullet\bullet} - r\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta\right).\vec{e}_\theta +$$
$$(2r^\bullet\varphi^\bullet\sin\theta + 2r\theta^\bullet\varphi^\bullet\cos\theta + r\varphi^{\bullet\bullet}\sin\theta).\vec{e}_\varphi$$