LEÇON N°04
THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE

INTRODUCTION A LA NOTION DE MOMENT DE FORCE

Mise en situation cas statique

Dans le cas d'un mouvement de rotation la position d'équilibre ou le cas statique ne dépend pas uniquement des forces. Un autre paramètre est à prendre en compte, qui est la distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation.

Dans les trois figures ci-contre, l'axe de rotation est perpendiculaire au plan du dessin (la feuille) et passe par le point O.

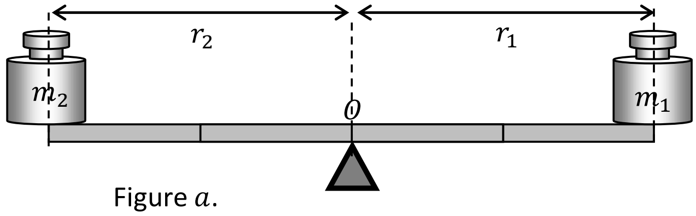


Figure a.

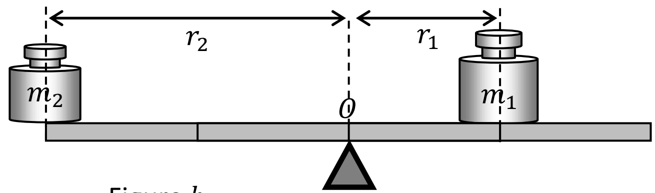


Figure b.

Dans la figure a. l'équilibre est obtenu car les deux corps ont la même masse $m_1 = m_2$ et sont à égale distance de l'axe de rotation $r_1 = r_2$.

Nous pouvons tout aussi bien obtenir l'équilibre dans la figure b . où la masse $m_1 = 2m_2$ est deux fois plus grande que la masse m_2 mais en même temps la distance $r_2 = 2r_1$ est deux fois pus grande que la distance r_1.

Dans le cas général, l'équilibre statique est obtenu si la condition $m_1.r_1 = m_2.r_2$ est réalisée (figure c.)

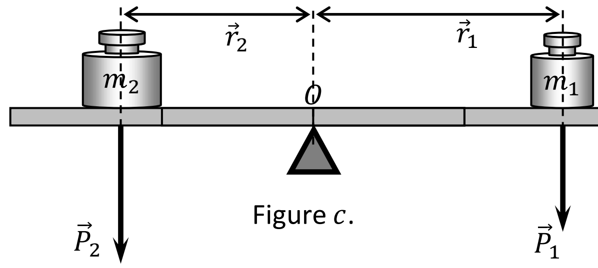


Figure c.

En utilisant les forces (les poids) nous pouvons écrire la condition d'équilibre statique

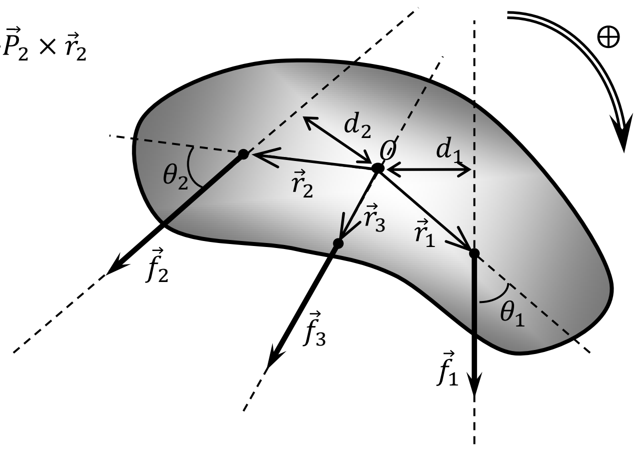
$$P_1.r_1 = P_2.r_2$$

Ou vectoriellement, ce qui nous permettra par la suite d'introduire la notion de vecteur moment de force

$$\vec{P}_1 \times \vec{r}_1 = -\vec{P}_2 \times \vec{r}_2$$

Moment de force, bras de levier d'une force

Une généralisation de la loi précédente dans le cas statique, consiste à prendre un corps solide indéformable quelconque pouvant tourner dans le plan, comme le montre la figure ci-contre. L'axe de rotation est dans ce cas la droite perpendiculaire au plan de rotation et passant par le point O reste invariant lors de la rotation du solide.



Les forces $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ sont appliquées respectivement aux points M_1, M_2, M_3, et nous notons les vecteurs

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1},\ \ \vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2},\ \ \vec{r}_3 = \overrightarrow{OM_3}$$

La condition d'équilibre statique s'écrit alors

$$\sum_i \vec{f}_i \times \vec{r}_i = \vec{f}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{f}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{f}_3 \times \vec{r}_3 = \vec{0}$$

Si nous voulons écrire la relation entre les modules, nous choisissons d'abord un sens positif pour la rotation, *ce choix est arbitraire*. Nous remarquons alors les trois cas de figures suivants

- La force $\vec{f}_1$ fait tourner le corps solide dans le sens positif.
- La force $\vec{f}_2$ fait tourner le corps solide dans le sens négatif.
- La force $\vec{f}_3$ ne peut pas faire tourner le corps solide.

Donc, nous écrivons

$$f_1.r_1.\sin\theta_1 - f_2.r_2.\sin\theta_2 + f_3.r_3.\sin 0 = 0$$

Ou bien

$$f_1.d_1 - f_2.d_2 + f_3.0 = 0$$

Tel que

$$d_1 = r_1.\sin\theta_1 \quad ; \quad d_2 = r_2.\sin\theta_2 \quad ; \quad d_3 = r_3.\sin 0 = 0$$

Sont les bras de levier des forces respectives $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$.

La définition du bras de levier d'une force étant la distance entre la droite portant la force et l'axe de rotation.

Conclusion :

Nous appelons vecteur moment de la force $\vec{f}_i$ la ***grandeur vectorielle***

$$\vec{M}(\vec{f}_i) = \vec{f}_i \times \vec{r}_i$$

Tel que $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$ est la position du point d'application de la force $\vec{f}_i$ par rapport au point O par lequel passe l'axe de rotation.

Le module du moment de force s'écrit

$$M(\vec{f}_i) = f_i.d_i = f_i.r_i.\sin\theta_i$$

$d_i = r_i.\sin\theta_i$ est la distance entre la droite portant la force et l'axe de rotation appelé bras de force.

La condition d'équilibre statique s'écrit vectoriellement

$$\sum_i \vec{M}(\vec{f}_i) = \sum_i \vec{f}_i \times \vec{r}_i = \vec{0}$$

Et en valeurs algébriques

$$\sum_i M(\vec{f}_i) = \sum_i f_i.d_i = 0$$

Les moments de forces qui font tourner le solide dans le sens positif (choisi arbitrairement) sont comptés positivement et les moments des forces qui font tourner le solide dans le sens opposé sont comptés négativement.

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE POUR UN POINT MATÉRIEL

Définition du moment cinétique :

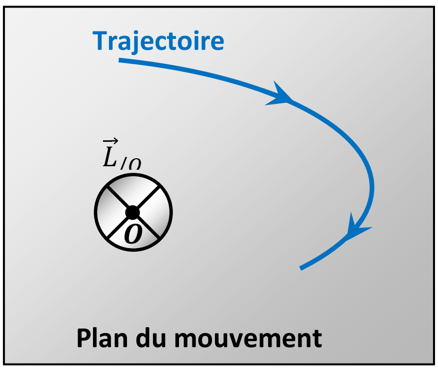
Soit une particule de masse m ayant un vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ et une vitesse $\vec{v}$.
Le *vecteur moment cinétique* par rapport au point O est définit par :

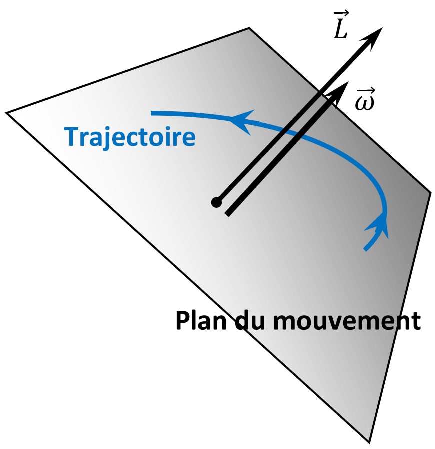
$$\vec{L}_{/O} = \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m.\vec{r} \times \vec{v} \tag{1}$$

Propriétés :

$\vec{L}_{/O}$	Module : $L = mr.v.\sin\phi$ tel que ϕ est l'angle $(\vec{r}, \vec{v})$.
	Direction : perpendiculaire au plan du mouvement (plan $(\vec{r}, \vec{v})$).
	Sens : donné par la règle de la main droite (en suivant le sens du mouvement).

L'unité du moment cinétique dans le système [MKSA] est : $kg.m^2.s^{-1}$





Moment cinétique en fonction du vecteur vitesse angulaire :

Soit un point matériel se déplaçant dans le plan (Oxy). En utilisant les coordonnées polaires, on a : $\vec{r} = r.\vec{e}_r$ et $\vec{v} = r^{\bullet}.\vec{e}_r + r\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta$.

Mais puisque : $\vec{e}_r \times \vec{e}_r = \vec{0}$ et $\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_z$. On a alors :

$$\vec{L} = m.r^2\vec{\omega} \tag{2}$$

Tel que

$$\vec{\omega} = \theta^{\bullet}.\vec{e}_z$$

Est le *vecteur vitesse angulaire*.

Propriétés du vecteur vitesse angulaire :

$\vec{\omega} = \theta^{\bullet}.\vec{e}_z$	Module : $\omega = \lvert\theta^{\bullet}\rvert$
	Direction : perpendiculaire au plan du mouvement.
	Sens : donné par la règle de la main droite (en suivant le sens du mouvement).

Théorème du moment cinétique (dans le cas d'un mouvement circulaire) :
Si le mouvement est circulaire, alors $r = R = \text{constante}$.
Dérivons l'équation (1) :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a})$$

Comme $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (3)$$

Avec, le vecteur moment de force par rapport au point O.

$\vec{M}_{/O} = \vec{M}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$	Module : $M(\vec{F}) = r.F.\sin\alpha$ tel que α est l'angle $(\vec{r}, \vec{F})$.
	Direction : perpendiculaire à $\vec{r}$ et à $\vec{F}$.
	Sens : donné par la règle de la main droite.

Dérivons l'équation (2) : Dans le cas d'un mouvement circulaire $r = R = \text{constante}$.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m.R^2\frac{d\vec{\omega}}{dt} = m.R^2\vec{\gamma} \qquad (4)$$

Avec, le vecteur accélération angulaire.

$\vec{\gamma} = \theta^{\bullet\bullet}.\vec{e}_z$	Module : $\gamma = \lvert\theta^{\bullet\bullet}\rvert$
	Direction : perpendiculaire au plan de rotation.
	Sens : donné par le signe de $\theta^{\bullet\bullet}$.

Enfin en comparant les équations (3) et (4) on obtient le ***théorème du moment cinétique*** sous la forme :

$$\vec{M}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = I.\vec{\gamma}$$
$$I_{/O} = I = m.R^2$$

$I_{/O}$ est le moment d'inertie du point matériel en rotation par rapport au point O (unité dans le système $[\text{MKSA}] = kg.m^2$)

Remarque 1 :
Dans l'expression du moment de force représente la résultante de toutes les forces. Il est clair que le moment de cette résultante est égal à résultante de tous les moments :

$$\vec{M}(\vec{F}) = \vec{M}\left(\sum_i \vec{f}_i\right) = \vec{r} \times \sum_i \vec{f}_i = \sum_i \vec{r} \times \vec{f}_i = \sum_i \vec{M}(\vec{f}_i)$$

On peut alors réécrire le théorème du moment cinétique sous la forme.

$$\sum_i \vec{M}(\vec{f}_i) = I.\vec{\gamma}$$

Remarque 2 :

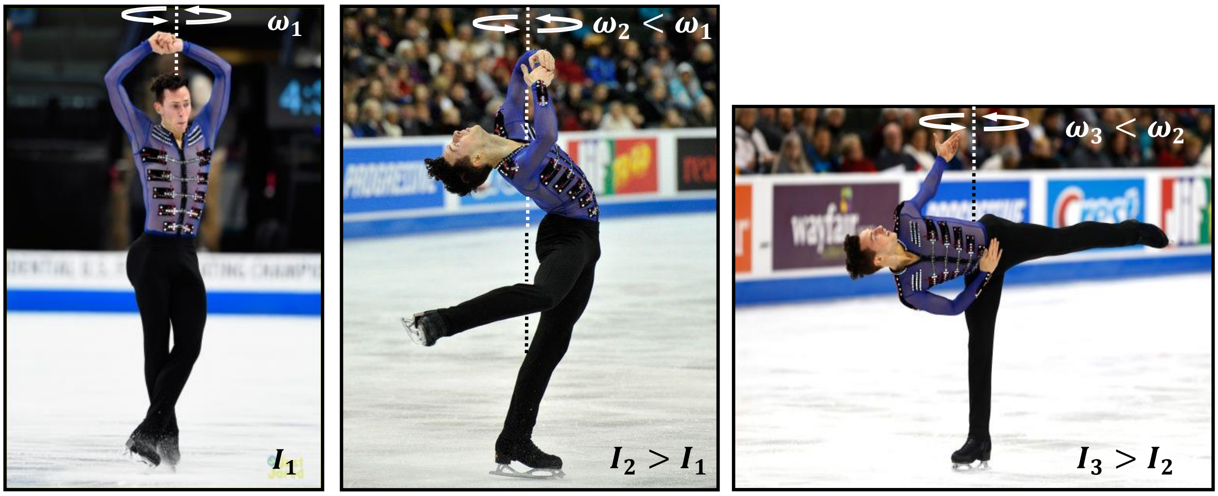
Dans le cas d'une force centrale (dirigée vers l'origine) $\vec{F}$ est parallèle à $\vec{r}$.

$$\vec{F} \parallel \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{constante}$$

Remarque 3 :

Le moment d'inertie représente la résistance du corps à son propre mouvement de rotation. En effet, pour une force constante plus le moment d'inertie est grand, plus l'accélération angulaire est faible (exemple du patineur figure ci-dessous).

De la même manière *la masse m représente la résistance du corps à son propre mouvement de translation*. En effet, pour une force constante plus la masse est grande, plus l'accélération est faible. C'est pour cette raison que la masse est aussi appelée masse d'inertie.



THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE POUR UN SOLIDE INDÉFORMABLE

Dans le cas de la rotation d'un solide indéformable autour d'un axe (Δ) (de symétrie) ***passant par son centre de masse***, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\sum \vec{M}(\vec{f}_i) = I_{(\Delta)}.\vec{\gamma}$$

Où $I_{(\Delta)}$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Δ).

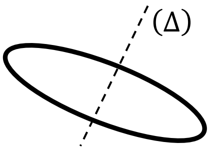
***Théorème de* Huygens :**

Le moment d'inertie d'un solide indéformable de masse m par rapport à un axe (Δ') ***parallèle*** à un axe de symétrie (Δ) *passant par son centre de symétrie* est donné par :

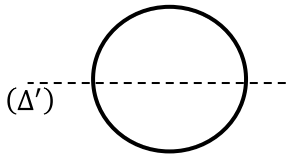
$$I_{(\Delta')} = I_{(\Delta)} + m.D^2$$

Tel que $D = \text{distance}\left(I_{(\Delta)}, I_{(\Delta')}\right)$ est la distance séparant les deux axes parallèles.

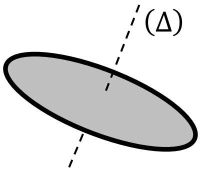
Moment d'inertie pour quelques solides usuels :



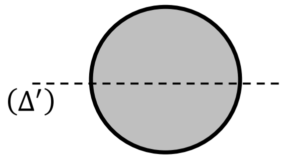
Anneau (M, R) : $I_{(\Delta)} = M.R^2$



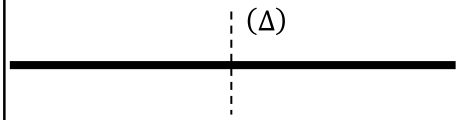
Anneau (M, R) : $I_{(\Delta')} = \frac{1}{2}M.R^2$



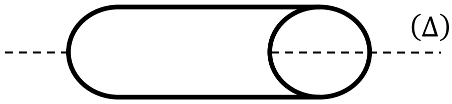
Disque (M, R) : $I_{(\Delta)} = \frac{1}{2}M.R^2$



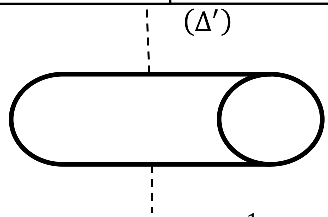
Disque (M, R) : $I_{(\Delta')} = \frac{1}{4}M.R^2$



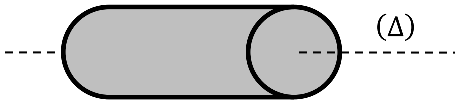
Tige (M, L) : $I_{(\Delta)} = \frac{1}{12}M.L^2$



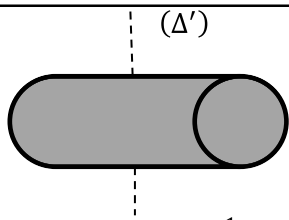
Cylindre creux (M, R, L) : $I_{(\Delta)} = M.R^2$



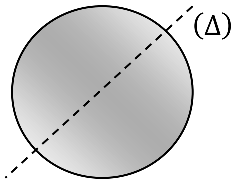
Cylindre creux (M, R, L) : $I_{(\Delta')} = \frac{1}{2}M.R^2 + \frac{1}{12}M.L^2$



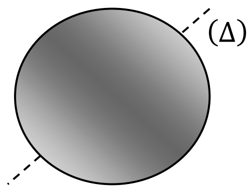
Cylindre plein (M, R, L) : $I_{(\Delta)} = \frac{1}{2}M.R^2$



Cylindre creux (M, R, L) : $I_{(\Delta')} = \frac{1}{4}M.R^2 + \frac{1}{12}M.L^2$



Sphère creuse (M, R) : $I_{(\Delta)} = \frac{2}{3}M.R^2$



Sphère pleine (M, R) : $I_{(\Delta)} = \frac{2}{5}M.R^2$

Remarque :

Dans le cas général, le solide ne tourne pas autour d'un axe en particulier. Le théorème du moment cinétique, dans ce cas, reste le même, sauf que le moment d'inertie du solide n'est plus un scalaire $I_{(\Delta)}$ mais un tenseur $\mathbb{I}$ appelé tenseur d'inertie. Les éléments diagonaux de ce tenseur sont appelés moments d'inerties et les éléments non diagonaux sont appelés produits d'inertie.