LEÇON N°06

ÉQUATIONS D'EULER-LAGRANGE

Partons du principe des travaux virtuels de d'Alembert.

$$\sum_{\alpha=1}^{N}(\vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha) \bullet \delta\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha \bullet \delta\vec{r}_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha \bullet \delta\vec{r}_\alpha = 0$$

Forces généralisées :

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha \bullet \delta\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha \bullet \left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i\right) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha \bullet \frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i$$

En définissant les forces généralisées par

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha \bullet \frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$$

Nous avons

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha \bullet \delta\vec{r}_\alpha = \sum_{i=1}^{d} Q_i.\delta q_i \tag{1}$$

Equations de Lagrange :

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha \bullet \delta\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} \bullet \left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i\right) = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} m_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} \bullet \frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i$$

Que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha \bullet \delta\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} m_\alpha \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_\alpha \bullet \frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} m_\alpha \vec{v}_\alpha \bullet \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)\delta q_i$$

En utilisant les deux propriétés précédemment démontrées

$$\frac{\partial\vec{v}_\alpha}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\vec{v}_\alpha}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)$$

Nous trouvons

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha \bullet \delta\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} m_\alpha \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_\alpha \bullet \frac{\partial\vec{v}_\alpha}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i - \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} m_\alpha \vec{v}_\alpha \bullet \frac{\partial\vec{v}_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i$$

Ou bien encore

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha \bullet \delta\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} m_\alpha \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}\vec{v}_\alpha \bullet \vec{v}_\alpha\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}\vec{v}_\alpha \bullet \vec{v}_\alpha\right)\right]\delta q_i$$

Comme $\vec{v}_\alpha \bullet \vec{v}_\alpha = v_\alpha^2$ et en inversant la sommation

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha \bullet \delta\vec{r}_\alpha = \sum_{i=1}^{d}\sum_{\alpha=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2\right)\right]\delta q_i$$

Comme la dérivée est linéaire.

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha \bullet \delta\vec{r}_\alpha = \sum_{i=1}^{d}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2\right)\right]\delta q_i$$

Le terme entre parenthèse représente la somme des énergies cinétiques de toutes les particules, qui est en fait l'énergie cinétique totale du système.

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

Donc

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha \bullet \delta\vec{r}_\alpha = \sum_{i=1}^{d} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T)\right] \delta q_i \qquad (2)$$

En remplaçant les équations (1) et (2) dans le principe des travaux virtuels de d'Alembert.

$$\sum_{i=1}^{d} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T)\right] \delta q_i = \sum_{i=1}^{d} Q_i . \delta q_i$$

Ou encore

$$\sum_{i=1}^{d} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T) - Q_i\right] \delta q_i = 0$$

Comme toutes les variations δq_i sont indépendantes. Nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T) = Q_i$$

Qui est la forme première des équations de Lagrange.

Cas de forces dérivants d'un potentiel :

Dans le cas où toutes les forces agissant sur les particules dérivent d'un potentiel (sauf les forces de contraintes de liaison).

$$\vec{F}_\alpha^{\text{pot}} = -\overrightarrow{grad}(U_\alpha) = -\frac{\partial U_\alpha}{\partial \vec{r}_\alpha}$$

U_α sont les énergies potentielles des N particules.

$$Q_i^{\text{pot}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{pot}} \bullet \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \vec{r}_\alpha} \bullet \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$$

$\partial U_\alpha / \partial \vec{r}_\alpha$ est une notation abusive, elle signifie que nous devons dérivées par rapport aux composantes du vecteur position. En coordonnées cartésiennes, par exemple, cette équation s'écrirait :

$$Q_i^{\text{pot}} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\alpha}\frac{\partial y_\alpha}{\partial q_i} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial z_\alpha}\frac{\partial z_\alpha}{\partial q_i}\right)$$

Or

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\alpha}\frac{\partial y_\alpha}{\partial q_i} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial z_\alpha}\frac{\partial z_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial U_\alpha}{\partial q_i}$$

D'où

$$Q_i^{\text{pot}} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial U_\alpha}{\partial q_i} = -\frac{\partial(\sum_{\alpha=1}^{N} U_\alpha)}{\partial q_i}$$

Comme la somme des énergies potentielles de toutes les particules est égale à l'énergie potentielle du système

$$\sum_{\alpha=1}^{N} U_\alpha = U$$

Il vient que

$$Q_i^{\text{pot}} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

L'énergie potentielle U n'étant fonction que des coordonnées généralisées $U(\{q_i\})$.
En remplaçant dans l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial q_i^{\bullet}}(T)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T) = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Comme $\partial U/\partial q_i^{\bullet} = 0$ nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^{\bullet}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Qui est appelée équation d'Euler-Lagrange ou équation de Lagrange. Avec

$$\mathcal{L} = T - U$$

Qui est appelée fonction de Lagrange (ou Lagrangien) du système de N particules.

Potentiel généralisé :

Dans le cas plus général où l'énergie potentielle est une fonction des coordonnées généralisées q_i, des vitesses généralisées $q_i^{\bullet}$, et explicitement du temps t.

$$U(\{q_i\}, \{q_i^{\bullet}\}, t)$$

Les forces généralisées (qui dérivent d'un potentiel) s'écrivent

$$Q_i^{\text{pot}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial q_i^{\bullet}}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Et le Lagrangien

$$\mathcal{L}(\{q_i\}, \{q_i^{\bullet}\}, t) = T(\{q_i\}, \{q_i^{\bullet}\}, t) - U(\{q_i\}, \{q_i^{\bullet}\}, t)$$

<u>Forces non conservatives :</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^{\bullet}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^{\text{NC}}$$

Avec

$$\mathcal{L}(\{q_i\}, \{q_i^{\bullet}\}, t) = T(\{q_i\}, \{q_i^{\bullet}\}, t) - U(\{q_i\}, \{q_i^{\bullet}\}, t)$$

Force de frottement visqueux – Fonction de dissipation :

Prenons le cas où les forces non conservatives sont des forces de frottements proportionnelles aux vitesses des particules (cas de particules se déplaçant dans un fluide).

$$\vec{F}_\alpha^{\text{frottement}} = -\beta_\alpha . \vec{v}_\alpha$$

Si nous définissons la fonction de dissipation pour la particule par :

$$D_\alpha = \frac{1}{2}\beta_\alpha v_\alpha^2$$

Alors

$$\vec{F}_\alpha^{\text{frottement}} = -\vec{\nabla}_{\vec{v}_\alpha}(D_\alpha) = -\frac{\partial D_\alpha}{\partial \vec{v}_\alpha}$$

$\partial D_\alpha / \partial \vec{v}_\alpha$ est aussi une notation abusive, elle signifie que nous devons dérivées par rapport aux composantes du vecteur vitesse de la particule d'indice α.

Calculons la force généralisée qui correspond au frottement visqueux

$$Q_i^{\text{frottement}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{frottement}} \bullet \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \beta_\alpha . \vec{v}_\alpha \bullet \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$$

Comme

$$\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i}$$

Alors

$$Q_i^{\text{frottement}} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \beta_\alpha . \vec{v}_\alpha \bullet \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \beta_\alpha \frac{1}{2}\frac{\partial v_\alpha^2}{\partial \dot{q}_i}$$

Ce qui donne

$$Q_i^{\text{frottement}} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$$

Avec

$$D = \sum_{\alpha=1}^{N} D_\alpha$$

Est la fonction de dissipation totale du système.

Et l'équation de Lagrange s'écrit, dans ce cas :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^{\text{ncv}}$$

Q_i^{ncv} représente les forces généralisées non conservatives *autres que le frottement visqueux*.

$$Q_i^{\text{ncv}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{ncv}} \bullet \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$$