# LEÇON N°10
# SYMÉTRIES ET LOIS DE CONSERVATION

**Impulsions généralisées :**

Les impulsions généralisées $p_i$ sont définies par :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

L'impulsion généralisée possède la dimension :

- D'une quantité de mouvement si $q_i$ est une variable de translation (Exemple : particule libre sur une droite, point matériel sur un plan incliné sans frottement $(q = x)$)
- D'un moment cinétique si $q_i$ est une variable rotation (Exemple : particule libre sur un cercle, pendule simple $(q = \theta)$)

**Intégrales premières du mouvement :**

Les intégrales premières du mouvement sont des fonctions des coordonnées généralisées et des vitesses généralisées (et éventuellement du temps) qui se conservent au cours du mouvement.

$$F(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t) = \text{Constante}$$

$F(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$ sont des équation différentielles du premier ordre par rapport à la variable $q_i$.

**Coordonnée cyclique :**

Une coordonnée généralisée qui n'apparait pas explicitement dans le Lagrangien mais dont la dérivée par rapport au temps apparait (vitesse généralisée) est dite « coordonnée cyclique ou ignorable ».

*Si $q_i$ est une coordonnée cyclique alors $p_i$ est une intégrale première du mouvement.*

**Hamiltonien :**

Le Lagrangien est une fonction des coordonnées généralisées, des vitesses généralisées et peut aussi dépendre explicitement du temps. Sa différentielle s'écrit donc :

$$d\mathcal{L}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Et la dérivée totale par rapport au temps

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

En utilisant l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

On peut donc écrire

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{d} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Et

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i^\bullet}q_i^\bullet-\mathcal{L}\right)=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

On définit alors la fonction de Hamilton ou Hamiltonien par :

$$\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\},t)=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i^\bullet}q_i^\bullet-\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{d}p_i\,q_i^\bullet-\mathcal{L}$$

**Remarque :**

$\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\},t)$ est une fonction des coordonnées généralisées $\{q_i\}$, des impulsions généralisées $\{p_i\}$ et éventuellement du temps, c'est-à-dire que nous devons remplacer tous les $\{q_i^\bullet\}$ que nous trouvons parleurs expressions en fonction des $\{q_i\}$ et des $\{p_i\}$.

**Propriété :**

*Si le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps alors $\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\})$ est une intégrale première du mouvement.*

En effet, si

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}=0$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i^\bullet}q_i^\bullet-\mathcal{L}\right)=\frac{d}{dt}\left(\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\})\right)=0$$

Et

$$\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\})=\text{Constante}$$

**Cas de contraintes ne dépendants pas explicitement du temps :**

Si les contraintes ne dépendent pas explicitement du temps alors les positions des particules et l'énergie potentielle du système s'expriment uniquement en fonction des coordonnées généralisées $\{q_i\}$.

$$\text{Contraintes indépendantes du temps}\ \Rightarrow\ \vec{r}_\alpha(\{q_i\})\ \text{ et }\ U(\{q_i\})$$

Dans ce cas

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i^\bullet}=\frac{\partial T}{\partial q_i^\bullet}$$

Avec

$$T=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{2}m_\alpha.v_\alpha^2$$

Comme

$$\vec{v}_\alpha=\frac{d\vec{r}_\alpha(\{q_i\})}{dt}=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}q_i^\bullet$$

Et

$$v_\alpha^2=\vec{v}_\alpha\bullet\vec{v}_\alpha=\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}q_i^\bullet\right)\bullet\left(\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_j}q_j^\bullet\right)$$

D'où

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \cdot \left( \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_i \, \dot{q}_j \right)$$

***Si les positions $\vec{r}_\alpha(\{q_i\})$ ne dépendent pas explicitement du temps t alors l'énergie cinétique du système $T$ est une forme quadratique des vitesses généralisée $\{\dot{q}_i\}$.***

Utilisons le fait que l'énergie potentielle ne dépend pas des vitesses généralisées $U(\{q_i\})$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \frac{\partial v_\alpha^2}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\vec{v}_\alpha \bullet \vec{v}_\alpha)$$

En dérivant le produit scalaire (le produit scalaire étant commutatif)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left( \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \bullet \vec{v}_\alpha + \vec{v}_\alpha \bullet \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \bullet \vec{v}_\alpha$$

Or, nous savons que d'après la première identité

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$$

Donc

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \bullet \vec{v}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left\{ \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \bullet \left( \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \right\}$$

En remplaçant dans l'expression du Hamiltonien

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left\{ \left( \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \bullet \left( \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \right\} - \mathcal{L}$$

Le terme

$$\left( \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \bullet \left( \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \vec{v}_\alpha \bullet \vec{v}_\alpha = v_\alpha^2$$

D'où

$$\mathcal{H} = 2T - \mathcal{L} = 2T - (T - U)$$

Finalement, nous trouvons :

$$\mathcal{H}(\{q_i\}, \{p_i\}) = T + U = E_m$$

Qui n'est autre que l'énergie mécanique totale.

***Conclusion :***

***Dans le cas de contraintes ne dépendants pas explicitement du temps, alors*** :

***L'énergie cinétique est une forme quadratique des vitesses généralisées, l'énergie potentielle fonction uniquement des coordonnées généralisées et la fonction de Hamilton***

$$\mathcal{H}(\{q_i\}, \{p_i\}) = \sum_{i=1}^{d} p_i \, \dot{q}_i - \mathcal{L} = T + U$$

***Représente l'énergie mécanique totale du système, elle est constante si le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps.***