RÉSUMÉ DU COURS

ÉQUATION D'EULER-LAGRANGE

$y(x)$ une fonction scalaire d'une variable réelle x . $(y'(x) = dy(x)/dx)$

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x).\,dx = I_{\text{extremum}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Les dérivées partielles $\partial f/\partial y$ et $\partial f/\partial y'$ sont calculées en considérant que les variables y , y' et x de f sont indépendantes.

FORMULE DE BELTRAMI

Dans la cas où la fonction $f(y, y')$ ne dépend pas explicitement de x.

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{constante}$$

MÉTHODE VARIATIONELLE AVEC CONTRAINTE

Fonctionnelle dont nous cherchons l'extremum

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} f(\{y_i\}, \{y_i'\}, x).\,dx = I_{\text{extremum}}$$

Contraintes de type holonome

k contraintes de la forme $\quad g_\alpha(y_1, y_2, \dots, y_n, x) = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots, k)$

Nous cherchons l'extremum de la fonctionnelle

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \left(f(\{y_i\}, \{y_i'\}, x) - \sum\nolimits_\alpha \mu_\alpha(x).\,g_\alpha(\{y_i\}, x)\right).\,dx$$

Contraintes de forme intégrale

k contraintes de la forme (K_α sont des constantes)

$$\int_{x_1}^{x_2} g_\alpha(\{y_i\}, \{y_i'\}, x).\,dx = K_\alpha \qquad (\alpha = 1, \dots, k)$$

Nous cherchons l'extremum de la nouvelle fonctionnelle

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \left(f(\{y_i\}, \{y_i'\}, x) - \sum\nolimits_\alpha \mu_\alpha.\,g_\alpha(\{y_i\}, \{y_i'\}, x)\right).\,dx$$

Nous calculons les solutions $y_i(x)$ en fonction des μ_α. Et les multiplicateurs de Lagrange sont calculés en remplaçant $y_i(x)$ dans le système d'équation donné par les contraintes.

SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 03
CALCUL VARIATIONNEL

Exercice 01 : *Problème du nageur.*

Un sauveteur se trouvant au point de coordonnées $(0, a)$ veut arriver au plus vite pour sauver un nageur qui se noie au point $(d, -b)$. Sachant que la vitesse v_1 du sauveteur sur la plage $(y \geq 0)$ est plus grande que sa vitesse v_2 dans l'eau $(y \leq 0)$.

1. Faire un schéma représentant les grandeurs indiquées.
2. Trouver l'équation qui donne le point $(x, 0)$ où doit entrer le sauveteur dans l'eau pour atteindre le nageur en un temps minimum.
3. En déduire une loi analogue à la loi de Snell et Descartes pour la réfraction.

Exercice 02 : *Principe de Fermat.*

Dans le plan (Oxy), on considère la propagation de la lumière dans un milieu d'indice de réfraction $n(x, y)$ variable. On place un laser centré en $O(0,0)$et pointé dans une direction faisant un angle $\alpha \quad (0 < \alpha < \pi/2)$ avec l'axe (Ox).

1. A partir du principe de Fermat, montrer que la lumière minimise la fonctionnelle :

$$I[y(x)] = \int_{\text{Chemin}} n(x, y).\, dl$$

2. En utilisant le calcul variationnel, trouver la trajectoire $y(x)$ du faisceau lumineux dans le cas où

$$n(x, y) = \sqrt{n_0 - a.\, x^2} \qquad \text{avec} \qquad (n_0 > 1 \text{ et } a > 0)$$

3. Discuter et esquisser la trajectoire. Commenter ce résultat.

Exercice 03 : *Géodésique sur une sphère.*

Une géodésique est une courbe qui représente le chemin le plus court entre n'importe quels points, le chemin devant reposer dans ce cas sur la sphère de rayon R.

1. En utilisant les coordonnées sphériques, montrer que la distance à minimiser entre un point 1 et un point 2 sur la sphère est

$$L[\theta(\varphi)] = R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta}\,.\, d\varphi \qquad \text{avec} \qquad \theta' = \frac{d\theta}{d\varphi}$$

2. Minimiser cette fonctionnelle (en remarquant que l'intégrant ne dépend pas explicitement de φ) et prouver que l'on obtient l'équation suivante :

$$\sin^2\theta = a.\left(\theta'^2 + \sin^2\theta\right)^{1/2}$$

   Où a est une constante d'intégration.
3. Séparer les variables et calculer l'intégrale (faire le changement de variable $u = \text{cotan}\,\theta$).
4. En multipliant l'équation trouvée par $(R. \sin\theta)$, montrer que celle-ci s'écrit très simplement en coordonnées cartésiennes.
5. De quel objet géométrique est-ce l'équation ?
6. En déduire les géodésiques sur la sphère.

<u>Exercice 04 :</u> *Brachistochrone.*

Après l'atterrissage, un feu s'est déclaré à bord d'un avion et les passagers doivent quitter l'appareil par le toboggan, où ils peuvent glisser sans frottement.

Calculer en utilisant le principe variationnel la forme du toboggan, pour que l'avion soit évacué le *plus vite* possible avec l'altitude de sortie y_0 et le point d'arrivée sur le sol $x_0 = \frac{\pi}{2} y_0$ donnés.

(Utiliser le changement de variable $y' = \tan(\theta/2)$)

<u>Exercice 05 :</u> *Chainette.*

Une chainette de densité linéique $\lambda = dm/dl$ et de longueur l est attachée à deux points de même hauteur $(x = x_0\,, y = 0)$ et $(x = -x_0\,, y = 0)$, tel que x est la position horizontale et y la position verticale. La chainette est soumise uniquement à la force gravitationnelle.

1. Ecrire la contrainte sous une forme intégrale.
2. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, Trouver l'expression décrivant la forme de la chainette, sachant que l'énergie potentielle de la chainette doit être minimale.

Indice : Utiliser la formule de Beltrami si le Lagrangien ne dépend pas explicitement de x.
On donne :

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \operatorname{arccosh} u$$

<u>Exercice 06 :</u> *Pomme ou poire.*

A volume égal, de la poire et de la pomme, quel est le fruit qui a le moins de peau ?
On considère *un solide de révolution* avec l'axe (Oz) comme axe de symétrie. Ce solide est décrit par la fonction $r(z)$ (distance à l'axe en fonction de l'altitude) entre les altitudes 0 et h. En plus, l'axe (Oz) passe à l'intérieur du solide et le point le plus bas et le point le plus haut appartiennent à l'axe de symétrie ; en conséquence, $(r(0) = r(h) = 0)$. Dans ces conditions, on recherche le solide qui possède la surface minimum pour un volume imposé.

1. Donner les fonctionnelles Volume : $V[r]$et Aire : $A[r]$.
2. Ecrire la fonctionnelle S à rendre extrêmale en introduisant le multiplicateur de Lagrange μ.
3. Quelle est la forme recherchée ? Quelle est l'interprétation de μ ?
4. A partir de l'étude précédente, résoudre de manière très simple le problème inverse : Quelle est la forme du solide ayant le volume maximum pour une aire donnée ?