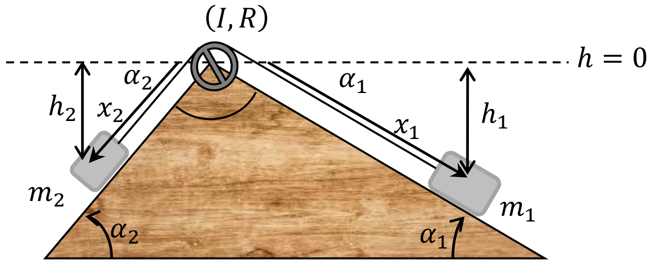
SOLUTIONS DE LA SÉRIE DE TD N° 04
FORMALISME DE HAMILTON

EXERCICE 01 : ***Double plan incliné***

1. Contraintes

$$x_1 + x_2 + R\phi = L \qquad \Rightarrow \qquad x_1 + x_2 = C = \text{constante}$$
$$x_2 = R\theta$$



Nombre de degrés de libertés (01)

$$\begin{cases} x_2 = x \\ x_1 = C - x \\ \theta = x/R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = x_2^\bullet = x^\bullet \\ v_1 = x_1^\bullet = -x^\bullet \\ \omega = \theta^\bullet = x^\bullet/R \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} h_2 = -x_2.\sin\alpha_2 = -x.\sin\alpha_2 \\ h_1 = -x_1.\sin\alpha_1 = -C.\sin\alpha_1 + x.\sin\alpha_1 \end{cases}$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1(x_1^\bullet)^2 + \frac{1}{2}m_2(x_2^\bullet)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)x^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 \qquad \Rightarrow \qquad U = -(m_2.\sin\alpha_2 - m_1.\sin\alpha_1)g.x - C.m_1 g.\sin\alpha_1$$

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)x^{\bullet 2} + (m_2.\sin\alpha_2 - m_1.\sin\alpha_1)g.x + C.m_1 g.\sin\alpha_1}$$

L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\bullet}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)x^\bullet\right) - (m_2.\sin\alpha_2 - m_1.\sin\alpha_1)g = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{x^{\bullet\bullet} = \frac{m_2.\sin\alpha_2 - m_1.\sin\alpha_1}{m_1 + m_2 + I/R^2}g = \text{constante}}$$

Hamiltonien

$$\mathcal{H}(x, p_x, t) = p_x x^\bullet - \mathcal{L}$$

Le moment conjugué (impulsion généralisée)

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\bullet} = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)x^\bullet \qquad \text{et} \qquad x^\bullet = \frac{p_x}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

Donc

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} - \left\{ \frac{1}{2} \frac{(m_1 + m_2 + I/R^2).\, p_x^2}{(m_1 + m_2 + I/R^2)^2} + (m_2.\sin\alpha_2 - m_1.\sin\alpha_1) g.\, x + C.\, m_1 g.\sin\alpha_1 \right\}$$

Et

$$\boxed{\mathcal{H}(x, p_x) = \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} - (m_2.\sin\alpha_2 - m_1.\sin\alpha_1) g.\, x - C.\, m_1 g.\sin\alpha_1}$$

Les équations de Hamilton (02 équations pour chaque degré de liberté).

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{m_1 + m_2 + I/R^2} \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = +(m_2.\sin\alpha_2 - m_1.\sin\alpha_1) g \end{cases}}$$

En dérivant la première équation et en remplaçant par la seconde, on retrouve l'équation du mouvement obtenue précédemment par la méthode de Lagrange.

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m_1 + m_2 + I/R^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} = \frac{m_2.\sin\alpha_2 - m_1.\sin\alpha_1}{m_1 + m_2 + I/R^2} g = \text{constante}}$$

2. Le Hamiltonien représente l'énergie mécanique totale.

$$\mathcal{H}(x, p_x) = T + U = \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} - (m_2.\sin\alpha_2 - m_1.\sin\alpha_1) g.\, x - C.\, m_1 g.\sin\alpha_1$$

L'énergie potentielle   est une fonction uniquement de la coordonnée généralisée   . elle ne dépend pas de   et ne dépend pas explicitement du temps.

3. Le Lagrangien (et le Hamiltonien) ne dépend pas du temps, donc le Hamiltonien est une intégrale première du mouvement.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = \text{Constante}$$

EXERCICE 02 : ***Poulies Coaxiales***

1. Contraintes

$$x_2 = x = -R_2\theta \quad ; \quad x_1 = R_1\theta + C$$

Nombre de degrés de liberté (01) ; coordonnée généralisée (θ).

$$\begin{cases} v_2 = x_2^\bullet = -R_2\theta^\bullet \\ v_1 = x_1^\bullet = R_1\theta^\bullet \\ \omega = \theta^\bullet \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} h_2 = -x_2 = R_2\theta \\ h_1 = -x_1 = -R_1\theta - C \end{cases}$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1(x_1^\bullet)^2 + \frac{1}{2}m_2(x_2^\bullet)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}(m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I)\theta^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = m_1gh_1 + m_2gh_2 \quad \Rightarrow \quad U = (m_2R_2 - m_1R_1)g.\theta - C.m_1g$$

Le Lagrangien

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I)\theta^{\bullet 2} - (m_2R_2 - m_1R_1)g.\theta + C.m_1g$$

Le moment conjugué (impulsion généralisée)

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet} = (m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I)\theta^\bullet \quad \text{et} \quad \theta^\bullet = \frac{p_\theta}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I}$$

L’énergie potentielle ne dépend pas des vitesses généralisées et ne dépend pas explicitement du temps. Donc, le Hamiltonien est égal à l’énergie mécanique totale.

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta, t) = T + U = \frac{1}{2}(m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I)\theta^{\bullet 2} + (m_2R_2 - m_1R_1)g.\theta - C.m_1g$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}(\theta, p_\theta, t) = T + U = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I} + (m_2R_2 - m_1R_1)g.\theta - C.m_1g}$$

Et les équations canoniques de Hamilton

$$\boxed{\begin{cases} \theta^\bullet = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I} \\ p_\theta^\bullet = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -(m_2R_2 - m_1R_1)g \end{cases}}$$

D’où, en dérivant la première équation et en remplaçant par la seconde, on retrouve l’équation du mouvement.

$$\theta^{\bullet\bullet} = \frac{p_\theta^\bullet}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta^{\bullet\bullet} = \frac{m_1R_1 - m_2R_2}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I}g = \text{constante}}$$

2. $\theta^{\bullet\bullet} =$ constante. La nature du mouvement est uniformément variée (rectiligne pour les deux masses ponctuelles et circulaire pour un point quelconque de la poulie).

3. Nous avons $x_2 = x = -R_2\theta$.

Pour calculer p_x nous devons calculer le Lagrangien en fonction de x et $x^\bullet$.

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I)\theta^{\bullet 2} - (m_2R_2 - m_1R_1)g.\theta + C.m_1g$$

Avec

$$\theta = -x/R_2 \qquad \text{et} \qquad \theta^{\bullet} = -x^{\bullet}/R_2$$

Donc

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I}{R_2^2}x^{\bullet 2} + \left(m_2 - m_1\frac{R_1}{R_2}\right)g.x + C.m_1g$$

Et

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\bullet}} = \frac{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I}{R_2^2}x^{\bullet} \qquad \Rightarrow \qquad p_x = -\frac{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I}{R_2}\theta^{\bullet} = -\frac{p_\theta}{R_2}$$

D’où la transformation

$$(\theta, p_\theta) \longrightarrow (x = -R_2\theta \;\;,\;\; p_x = -p_\theta/R_2)$$

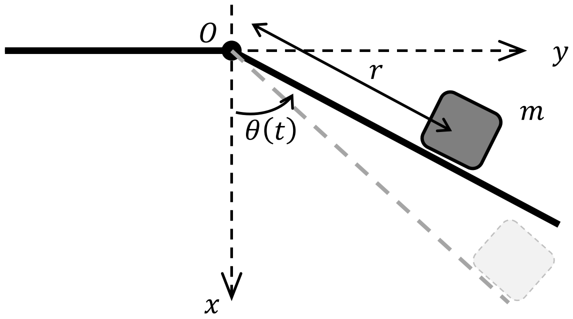
En utilisant les crochets de Poisson

$$\{x, p_x\}_{\theta, p_\theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial p_x}{\partial p_\theta} - \frac{\partial x}{\partial p_\theta}\frac{\partial p_x}{\partial \theta} = \frac{-R_2}{-R_2} = 1$$

D’où la transformation est canonique.

EXERCICE 03 : ***masse sur une trappe***

1. La masse m se déplaçant dans le plan vertical, alors elle possède – a priori – deux degrés de liberté. Mais puisque $\theta(t)$ est une fonction connue donc le nombre de degrés de liberté est réduit à un (01). La coordonnée généralisée que nous utiliseront est r (voir la figure).



2. r et θ sont les coordonnées polaires de la masse m. D'où la vitesse

$$\vec{v} = r^\bullet.\vec{e}_r + r.\theta^\bullet.\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad v^2 = r^{\bullet 2} + r^2\theta^{\bullet 2}$$

Donc l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(r^{\bullet 2} + r^2\theta^{\bullet 2}\right)$$

Et l'énergie potentielle

$$U = mgh = -mg.r.\cos\theta \qquad \text{avec} \qquad h = -r.\cos\theta$$

Le Lagrangien

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left(r^{\bullet 2} + r^2\theta^{\bullet 2}\right) + mg.r.\cos\theta$$

3. L'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r^\bullet}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}(mr^\bullet) - \left(mr\theta^{\bullet 2} + mg.\cos\theta\right) = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2} - g.\cos\theta = 0}$$

4. Le moment conjugué de la variable r.

$$p_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r^\bullet} = mr^\bullet \qquad \text{et} \qquad r^\bullet = \frac{p_r}{m}$$

Et le Hamiltonien

$$\mathcal{H}(r, p_r, t) = p_r r^\bullet - \mathcal{L} = \frac{p_r^2}{m} - \left(\frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2\theta^{\bullet 2}\right) + mg.r.\cos\theta\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}(r, p_r, t) = \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{m} - \frac{1}{2}mr^2\theta^{\bullet 2} - mg.r.\cos\theta}$$

Les équations de Hamilton

$$\boxed{\begin{cases} r^\bullet = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{m} \\ p_r^\bullet = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial r} = -\left(-mr.\theta^{\bullet 2} - mg.\cos\theta\right) \end{cases}}$$

D'où, en dérivant la première équation et en remplaçant par la seconde, on retrouve l'équation du mouvement.

$$r^{\bullet\bullet} = \frac{p_r^{\bullet}}{m} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r^{\bullet\bullet} = r.\theta^{\bullet 2} + g.\cos\theta}$$

5. Energie mécanique totale

$$E_m = T + U = \frac{1}{2}m\left(r^{\bullet 2} + r^2\theta^{\bullet 2}\right) - mg.r.\cos\theta$$

Ou

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{m} + \frac{1}{2}mr^2\theta^{\bullet 2} - mg.r.\cos\theta \neq \mathcal{H}}$$

6. Le Hamiltonien $\mathcal{H}$ n'est pas conservé, car il dépend explicitement du temps $\left(\theta(t)\right)$.

L'énergie mécanique totale E_m est conservée car il n'y a pas de perte d'énergie par frottement.

EXERCICE 04 :

Pendule simple

L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\theta^{\bullet 2} \qquad \text{avec} \qquad v = l\theta^{\bullet}$$

Et l'énergie potentielle

$$U = mgh = -mgl.\cos\theta \qquad \text{avec} \qquad h = -l.\cos\theta$$

Le Lagrangien

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2\theta^{\bullet 2} + mgl.\cos\theta$$

Le moment conjugué de la variable θ.

$$p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^{\bullet}} = ml^2\theta^{\bullet} \qquad \text{et} \qquad \theta^{\bullet} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

Puisque l'énergie potentielle ne dépend que de la coordonnée généralisée . Alors

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta, t) = T + U = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{ml^2} - mgl.\cos\theta$$

Les équations de Hamilton

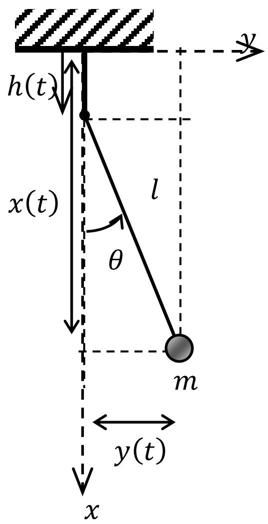
$$\begin{cases} \theta^{\bullet} = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{ml^2} \\ p_\theta^{\bullet} = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta} = -(+mgl.\sin\theta) \end{cases}$$

Et l'équation du mouvement est

$$\theta^{\bullet\bullet} = \frac{p_\theta^{\bullet}}{ml^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\theta^{\bullet\bullet} = -\frac{g}{l}\sin\theta}$$

La solution est une fonction sinusoïdale de t dans le cas des petits angles (pour $\theta \ll$; $\sin\theta \approx \theta$).

Pendule simple avec un axe de rotation mobile



Vitesse

$$\begin{cases} x(t) = h(t) + l.\cos\theta \\ y(t) = l.\sin\theta \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x^{\bullet} = h^{\bullet}(t) - l\theta^{\bullet}.\sin\theta \\ y^{\bullet} = l\theta^{\bullet}.\cos\theta \end{cases}$$

Et le carré du module

$$v^2 = h^{\bullet 2} + l^2\theta^{\bullet 2} - 2lh^{\bullet}\theta^{\bullet}.\sin\theta$$

L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(h^{\bullet 2} + l^2\theta^{\bullet 2} - 2lh^{\bullet}\theta^{\bullet}.\sin\theta\right)$$

Et l'énergie potentielle

$$U = mgH = -mgh(t) - mgl.\cos\theta \qquad \text{avec} \qquad H = -x = -h(t) - l.\cos\theta$$

Le Lagrangien

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left(h^{\bullet 2} + l^2\theta^{\bullet 2} - 2lh^{\bullet}\theta^{\bullet}.\sin\theta\right) + mgh(t) + mgl.\cos\theta$$

Le moment conjugué de la variable θ.

$$p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^{\bullet}} = ml^2\theta^{\bullet} - mlh^{\bullet}.\sin\theta \qquad \text{et} \qquad \theta^{\bullet} = \frac{p_\theta + mlh^{\bullet}.\sin\theta}{ml^2}$$

Le Hamiltonien

$$\mathcal{H}(\theta,p_\theta,t)=p_\theta\theta^\bullet-\mathcal{L}$$

En remplaçant, on trouve :

$$\mathcal{H}=\frac{p_\theta^2}{ml^2}+\frac{mlh^\bullet.\sin\theta\,.p_\theta}{ml^2}-\left(\frac{1}{2}m\left(h^{\bullet 2}+l^2\left(\frac{p_\theta+mlh^\bullet.\sin\theta}{ml^2}\right)^2-2lh^\bullet.\sin\theta\left(\frac{p_\theta+mlh^\bullet.\sin\theta}{ml^2}\right)\right)+mgh(t)+mgl.\cos\theta\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}(\theta,p_\theta,t)=\frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{ml^2}+\frac{h^\bullet}{l}\sin\theta\,.p_\theta-\frac{1}{2}mh^{\bullet 2}\cos^2\theta-mgh(t)-mgl.\cos\theta}$$

Les équations de Hamilton

$$\begin{cases}\theta^\bullet=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\theta}=\dfrac{p_\theta}{ml^2}+\dfrac{h^\bullet}{l}\sin\theta\\ p_\theta^\bullet=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta}=-\left(\dfrac{h^\bullet}{l}\cos\theta\,.p_\theta+mh^{\bullet 2}\cos\theta\,.\sin\theta+mgl.\sin\theta\right)\end{cases}$$

Et l'équation du mouvement est obtenue en dérivant la première équation

$$\theta^{\bullet\bullet}=\frac{p_\theta^\bullet}{ml^2}+\frac{h^{\bullet\bullet}}{l}\sin\theta+\frac{h^\bullet}{l}\theta^\bullet\cos\theta$$

Et en remplaçant p_θ par sa valeur dans la deuxième équation.

$$p_\theta^\bullet=-\left(\frac{h^\bullet}{l}\cos\theta\,.(ml^2\theta^\bullet-mlh^\bullet.\sin\theta)+mh^{\bullet 2}\cos\theta\,.\sin\theta+mgl.\sin\theta\right)$$

D'où

$$p_\theta^\bullet=-ml(h^\bullet\theta^\bullet\cos\theta+g.\sin\theta)$$

Et finalement

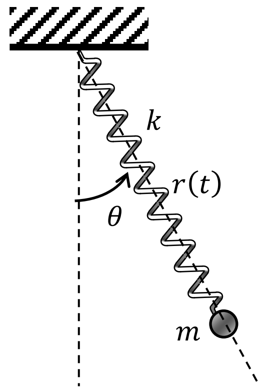
$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet}=\frac{h^{\bullet\bullet}-g}{l}\sin\theta}$$

EXERCICE 05 : ***Pendule simple avec un ressort***

1. Nombre de degrés de liberté (02).

Les coordonnées généralisées utilisées sont les coordonnées polaires (r, θ).

2. La vitesse en coordonnées polaires



$$\vec{v} = r^{\bullet}.\vec{e}_r + r.\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad v^2 = r^{\bullet 2} + r^2\theta^{\bullet 2}$$

Donc l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(r^{\bullet 2} + r^2\theta^{\bullet 2}\right)$$

Energie potentielle gravitationnelle

$$U_{\text{gravitationnelle}} = mgh = -mg.r.\cos\theta \qquad \text{avec} \qquad h = -r.\cos\theta$$

Energie potentielle élastique

$$U_{\text{élastique}} = \frac{1}{2}k.\Delta l^2 = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2$$

Energie potentielle totale

$$U = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 - mg.r.\cos\theta$$

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left(r^{\bullet 2} + r^2\theta^{\bullet 2}\right) - \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 + mg.r.\cos\theta}$$

Les équations d'Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial r^{\bullet}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \dfrac{d}{dt}(mr^{\bullet}) - \left(mr\theta^{\bullet 2} - k(r - l_0) + mg.\cos\theta\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \dfrac{d}{dt}(mr^2\theta^{\bullet}) - (-mgr.\sin\theta) = 0 \end{cases}$$

D'où les équations du mouvement

$$\boxed{\begin{cases} mr^{\bullet\bullet} - mr\theta^{\bullet 2} + k(r - l_0) - mg.\cos\theta = 0 \\ 2r^{\bullet}\theta^{\bullet} + r\theta^{\bullet\bullet} + g.\sin\theta = 0 \end{cases}}$$

3. Les moments conjugués.

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r^{\bullet}} = mr^{\bullet} \qquad \text{et} \qquad r^{\bullet} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}} = mr^2\theta^{\bullet} \qquad \text{et} \qquad \theta^{\bullet} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

Et le Hamiltonien

$$\mathcal{H} = p_r r^{\bullet} + p_\theta \theta^{\bullet} - \mathcal{L} = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \left(\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2\right) - \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 + mg.r.\cos\theta\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}(r, p_r, \theta, p_\theta, t) = \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 - mg.r.\cos\theta}$$

Les équations de Hamilton

$$\begin{cases} r^{\bullet} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{m} \\ p_r^{\bullet} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = -\left(-\dfrac{p_\theta^2}{mr^3} + k(r - l_0) - mg.\cos\theta\right) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \theta^{\bullet} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2} \\ p_\theta^{\bullet} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -(+mgr.\sin\theta) \end{cases}$$

D’où, en dérivant la première équation et en remplaçant par la seconde, on retrouve l’équation du mouvement.

$$\begin{cases} r^{\bullet\bullet} = \dfrac{p_r^{\bullet}}{m} \\ \theta^{\bullet\bullet} = \dfrac{p_\theta^{\bullet}}{mr^2} - 2r^{\bullet}\dfrac{p_\theta}{mr^3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} mr^{\bullet\bullet} = mr\theta^{\bullet 2} - k(r - l_0) + mg.\cos\theta \\ r\theta^{\bullet\bullet} = -g.\sin\theta - 2r^{\bullet}\theta^{\bullet} \end{cases}}$$

4. Le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, donc il est conservé.

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{H}(r, p_r, \theta, p_\theta) = \text{constante}$$

L’énergie potentielle ne dépend que des coordonnées généralisées, donc le Hamiltonien est égal à l’énergie mécanique totale.

$$\mathcal{H}(r, p_r, \theta, p_\theta) = E_m = T + U$$

<u>EXERCICE 06</u> : *Pendule sphérique*

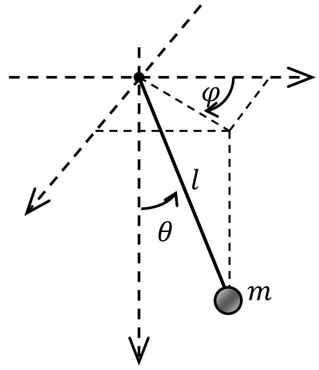
1. Nombre de degrés de liberté (02).

Les coordonnées généralisées utilisées sont les coordonnées sphériques (θ, φ) avec $(r = l = \text{constante})$.

2. La vitesse en coordonnées sphériques $(r^\bullet = 0)$

$$\vec{v} = l\theta^\bullet . \vec{e}_\theta + l \sin\theta . \varphi^\bullet . \vec{e}_\varphi \qquad \text{et} \qquad v^2 = l^2\theta^{\bullet 2} + l^2 \sin^2\theta . \varphi^{\bullet 2}$$

Donc l'énergie cinétique



$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\theta^{\bullet 2} + \sin^2\theta . \varphi^{\bullet 2}\right)$$

Energie potentielle gravitationnelle

$$U = mgh = -mgl.\cos\theta \qquad \text{avec} \qquad h = -r.\cos\theta = -l.\cos\theta$$

Le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2\left(\theta^{\bullet 2} + \sin^2\theta . \varphi^{\bullet 2}\right) + mgl.\cos\theta}$$

Les moments conjugués.

$$p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet} = ml^2\theta^\bullet \qquad \text{et} \qquad \theta^\bullet = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^\bullet} = ml^2\sin^2\theta . \varphi^\bullet \qquad \text{et} \qquad \varphi^\bullet = \frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta}$$

Et le Hamiltonien

$$\mathcal{H} = p_\theta\theta^\bullet + p_\varphi\varphi^\bullet - \mathcal{L} = \frac{p_\theta^2}{ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{ml^2\sin^2\theta} - \left(\frac{1}{2}ml^2\left(\left(\frac{p_\theta}{ml^2}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta}\right)^2\right) + mgl.\cos\theta\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}(\theta, p_\theta, \varphi, p_\varphi, t) = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{ml^2} + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{ml^2\sin^2\theta} - mgl.\cos\theta}$$

Les équations de Hamilton

$$\begin{cases} \theta^\bullet = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{ml^2} \\ p_\theta^\bullet = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta} = -\left(-\dfrac{p_\varphi^2}{ml^2}\sin^{-3}\theta . \cos\theta + mgl.\sin\theta\right) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \varphi^\bullet = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta} \\ p_\varphi^\bullet = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi} = 0 \end{cases}$$

D'où, pour la variable θ on dérive la première équation et en remplaçant par la seconde, on retrouve l'équation du mouvement (avec $p_\varphi = ml^2\sin^2\theta . \varphi^\bullet$).

Pour la variable φ on a $(p_\varphi^\bullet = 0)$, on en déduit directement que $(p_\varphi = \text{constante})$.

$$\begin{cases} \theta^{\bullet\bullet} = \dfrac{p_\theta^\bullet}{ml^2} \\ p_\varphi^\bullet = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \theta^{\bullet\bullet} = \sin\theta . \cos\theta . \varphi^{\bullet 2} - \dfrac{g}{l}\sin\theta \\ p_\varphi = ml^2\sin^2\theta . \varphi^\bullet = \text{constante} \end{cases}}$$

La seconde équation représente le conservation de la composante du moment cinétique suivant l'axe (OZ) pour un angle de rotation φ.

Le moment conjugué p_φ est une intégrale première du mouvement parce que φ est une variable cyclique (elle n'apparait pas dans le Lagrangien).

<u>EXERCICE 07</u> :

1. Nombre de degrés de liberté.

Point matériel dans l'espace : 03 degrés de liberté.
Contraintes : 02 contraintes.
La bille se déplace dans un cerceau $r = R = \text{constante}$.
Le cerceau tourne avec une vitesse angulaire constante $\varphi^\bullet = \omega = \text{constante} \Rightarrow \varphi = \omega t$.

03 degrés de liberté – 02 contraintes $\Rightarrow$ un (01) seul degré de liberté.

Coordonnée généralisée : variable θ (coordonnées sphériques).

2. Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{et} \qquad U = mgh$$

Avec

$$\vec{v} = r^\bullet \vec{e}_r + r\theta^\bullet \vec{e}_\theta + r.\sin\theta\,\varphi^\bullet \vec{e}_\varphi = R\theta^\bullet \vec{e}_\theta + R\omega.\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad v^2 = R^2\theta^{\bullet 2} + R^2\omega^2.\sin^2\theta$$

$$h = -R.\cos(\pi - \theta) = +R.\cos\theta$$

(Origine des énergies potentielle passant par O le centre du cerceau)

Donc

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}mR^2\omega^2.\sin^2\theta - mgR.\cos\theta}$$

3. Equation d'Euler-Lagrange du système.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

Avec

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet} = mR^2.\theta^\bullet \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet}\right) = mR^2.\theta^{\bullet\bullet}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = mR^2\omega^2.\sin\theta\cos\theta + mgR.\sin\theta$$

En remplaçant

$$mR^2.\theta^{\bullet\bullet} - mR^2\omega^2.\sin\theta\cos\theta + mgR.\sin\theta = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} - \omega^2.\sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$

4. Positions d'équilibre $\left(\theta^{\bullet\bullet}_{\text{équilibre}} = 0\right)$.

D'après l'équation du mouvement

$$\omega^2.\sin\theta_{\text{éq}}\cos\theta_{\text{éq}} + \frac{g}{R}\sin\theta_{\text{éq}} = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{\sin\theta_{\text{éq}}.\left(\cos\theta_{\text{éq}} + \frac{g}{R\omega^2}\right) = 0}$$

Les positions d'équilibre triviales :

$$\sin\theta_{éq} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{éq} = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta_{éq} = \pi}$$

Correspondent réciproquement, au point le plus haut et au point le plus bas du cerceau.

La position d'équilibre non triviale :

$$\cos\theta_{éq} = -\frac{g}{R\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{éq} = \arccos\left(-\frac{g}{R\omega^2}\right)}$$

Puisque $\cos\theta_{éq} \geq -1$ cette position ne peut être obtenue que pour $R\omega^2 \geq g$ donc $\boxed{\omega \geq \sqrt{g/R}}$.

5. Formalisme de Hamilton.

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet} = mR^2.\theta^\bullet \qquad \text{et} \qquad \theta^\bullet = \frac{p_\theta}{mR^2}$$

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta, t) = p_\theta \theta^\bullet - \mathcal{L}$$

En remplaçant

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta, t) = \frac{p_\theta^2}{mR^2} - \left(\frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mR^2} + \frac{1}{2}mR^2\omega^2.\sin^2\theta - mgR.\cos\theta\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}(\theta, p_\theta) = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mR^2} - \frac{1}{2}mR^2\omega^2.\sin^2\theta + mgR.\cos\theta}$$

Les équations de Hamilton

$$\begin{cases} \theta^\bullet = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mR^2} \\ p_\theta^\bullet = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = mR^2\omega^2.\sin\theta\cos\theta + mgR.\sin\theta \end{cases}$$

En dérivant la première équation

$$\theta^{\bullet\bullet} = \frac{p_\theta^\bullet}{mR^2}$$

Et en remplaçant par la deuxième équation

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} = \omega^2.\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\sin\theta}$$

Qui est l'équation différentielle du mouvement retrouvée précédemment.

EXERCICE 08 :

$$\mathcal{H}(q,p)=\frac{p^2}{2m}e^{-q/a}$$

1. Les équations de Hamilton

$$\boxed{\begin{cases} q^\bullet = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} = \dfrac{p}{m}e^{-q/a} \\ p^\bullet = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} = \dfrac{p^2}{2ma}e^{-q/a} \end{cases}}$$

2. En multipliant la première équation par p et en remplaçant p^2 dans le second membre par sa valeur donnée dans la deuxième équation, on obtient

$$p.q^\bullet = 2a.p^\bullet$$

Donc

$$q^\bullet = 2a\frac{p^\bullet}{p}$$

D'où en intégrant

$$q(t) = 2a.\ln p(t) + A$$

Les conditions initiales $q(0)=0$ et $p(0)=mv$ donnent : $A=-2a.\ln(mv)$. D'où :

$$q(t) = 2a.\ln\frac{p(t)}{mv} \qquad \text{et} \qquad p(t) = mv.\exp\left(\frac{q(t)}{2a}\right)$$

En remplaçant dans la première équation de Hamilton

$$q^\bullet = v.e^{-q/2a}$$

Et en séparant les variables

$$e^{+q/2a}dq = v.dt$$

L'intégration donne

$$2a.e^{+q/2a} = v.t + B$$

Et la condition initiale $q(0)=0 \quad \Rightarrow \quad B=2a$

Finalement on trouve que

$$\boxed{q(t) = 2a.\ln\left(\frac{v}{2a}t+1\right)} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{p(t) = mv.\left(\frac{v}{2a}t+1\right)}$$

3. En replaçant dans le Hamiltonien, on trouve

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{v}{2a}t+1\right)^2\exp\left(-2\ln\left(\frac{v}{2a}t+1\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante}}$$

Ce résultat est évident car le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(q,p) = \text{constante}$$

4. Si q a la dimension d'une longueur (cas de la translation) alors p est une quantité de mouvement, et la résultante des forces qui en découle est

$$\boxed{F_q = p^\bullet = \frac{mv^2}{2a} = \text{constante}}$$

5. On pose $(\tau = 2a/v)$, le développement de $q(t)$ en série de Taylor au voisinage de $t_0 = 0$:

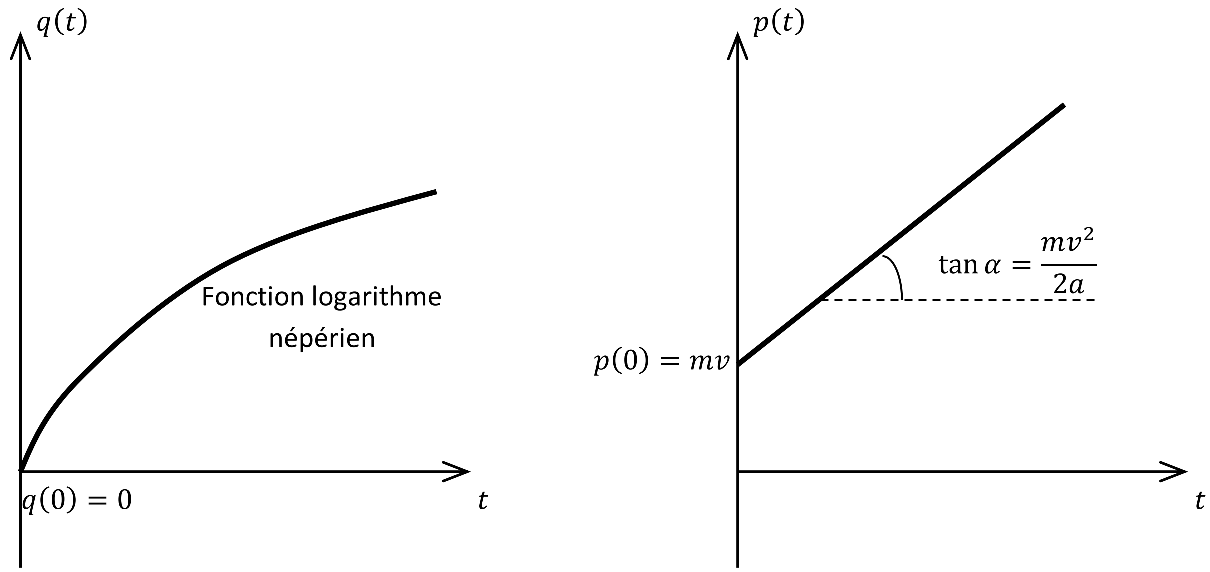
$$q(t) = 2a.\ln\left(\frac{t}{\tau} + 1\right) \approx 2a\left(0 + \frac{t}{\tau} - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + \cdots\right)$$

En se limitant au premier ordre (ordre zéro pour $p(t)$)

$$q(t) \approx \frac{2a}{\tau}t \qquad ; \qquad q^{\bullet}(t) \approx v \qquad \text{et} \qquad p(t) \approx mv$$

Ce qui représente un mouvement uniforme.

6. Représentation



EXERCICE 09 :

1. Oscillateur harmonique à une dimension.

Energie potentielle : $U(q) = \frac{1}{2}k.q^2 = \frac{1}{2}m\omega^2.q^2$

Energie cinétique : $T(q^\bullet) = \frac{1}{2}m.q^{\bullet 2}$

$$\boxed{\mathcal{L}(q,q^\bullet) = T - U = \frac{1}{2}m.q^{\bullet 2} - \frac{1}{2}m\omega^2.q^2}$$

2. Hamiltonien.

$$\mathcal{H}(q,p,t) = pq^\bullet - \mathcal{L} \qquad \text{avec} \qquad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\bullet} = mq^\bullet \qquad \text{et} \qquad q^\bullet = \frac{p}{m}$$

Donc

$$\mathcal{H}(q,p,t) = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{1}{2}\frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\omega^2.q^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega^2.q^2}$$

3. Transformation.

$$Q = C.(p + i.m\omega.q) \quad \text{et} \quad P = C.(p - i.m\omega.q)$$

Pour que la transformation soit canonique, elle doit vérifier : $\{q,p\}_{Q,P} = \{Q,P\}_{q,p} = 1$

$$\{Q,P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$$

En remplaçant

$$\{Q,P\}_{q,p} = C.(i.m\omega).C - C.C.(-i.m\omega) = 2C^2.(i.m\omega) = 1$$

Donc

$$\boxed{C^2 = 1/i.2m\omega}$$

4. Cherchons le nouvel Hamiltonien.

$$\begin{cases} Q = C.(p + i.m\omega.q) \\ P = C.(p - i.m\omega.q) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} q = (Q - P)/i.2m\omega.C \\ \quad p = (Q + P)/2C \end{cases}$$

En remplaçant q et p.

$$H(Q,P) = \frac{1}{2m}\frac{(Q+P)^2}{4C^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{(Q-P)^2}{(i.2m\omega)^2C^2} == \frac{i.2m\omega}{2m}\frac{(Q+P)^2}{4} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{(Q-P)^2}{i.2m\omega}$$

D'où

$$H(Q,P) = \frac{i\omega}{4}((Q+P)^2 - (Q-P)^2)$$

Et

$$\boxed{H(Q,P) = i\omega QP}$$

5. Les équations de Hamilton.

$$\begin{cases} Q^\bullet = \dfrac{\partial H}{\partial P} = i\omega Q \\ P^\bullet = -\dfrac{\partial H}{\partial Q} = -i\omega P \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} Q = Q_0.e^{i\omega t} \\ P = P_0.e^{-i\omega t} \end{cases}$$

Q_0 et P_0 sont des constantes d'intégrations déterminée à partir des conditions initiales.

Les Solution en q et p

$$q = \left(Q_0 . e^{i\omega t} - P_0 . e^{-i\omega t}\right)/i.2m\omega.C \qquad \text{et} \qquad p = \left(Q_0 . e^{i\omega t} + P_0 . e^{-i\omega t}\right)/2C$$

Pour les conditions initiales $\left(q(0) = q_0 \ ; \ p(0) = 0\right)$ on trouve

$$Q_0 = -P_0 = q_0 . (i.m\omega.C)$$

Ce qui donne

$$\boxed{q = q_0 . \cos(\omega t)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{p = -q_0 . m\omega . \sin(\omega t)}$$

<u>EXERCICE 10</u> :

1. Oscillateur harmonique à une dimension.

Energie potentielle : $U(q) = \frac{1}{2}k.q^2 = \frac{1}{2}m\omega^2.q^2$

Energie cinétique : $T(q^\bullet) = \frac{1}{2}m.q^{\bullet 2}$

$$\boxed{\mathcal{L}(q,q^\bullet) = T - U = \frac{1}{2}m.q^{\bullet 2} - \frac{1}{2}m\omega^2.q^2}$$

2. Hamiltonien.

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\bullet} = mq^\bullet \qquad \text{et} \qquad q^\bullet = \frac{p}{m}$$

$$\mathcal{H}(q,p,t) = pq^\bullet - \mathcal{L}$$

Donc

$$\mathcal{H}(q,p,t) = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{1}{2}\frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\omega^2.q^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega^2.q^2}$$

3. Transformation.

$$p = \sqrt{2m\omega.P}.\cos Q \quad \text{et} \quad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\sin Q$$

Pour que la transformation soit canonique, elle doit vérifier : $\{q,p\}_{Q,P} = \{Q,P\}_{q,p} = 1$

$$\{q,p\}_{Q,P} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q}$$

$$\frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q}\left(\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\sin Q\right) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\cos Q \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q}\left(\sqrt{2m\omega.P}.\cos Q\right) = -\sqrt{2m\omega.P}.\sin Q$$

$$\frac{\partial q}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\sin Q\right) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega.P}}\sin Q \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\sqrt{2m\omega.P}.\cos Q\right) = \sqrt{\frac{m\omega}{2P}}.\cos Q$$

En remplaçant

$$\{q,p\}_{Q,P} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\cos Q\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}.\cos Q + \frac{1}{\sqrt{2m\omega.P}}\sin Q\sqrt{2m\omega.P}.\sin Q$$

Donc

$$\{q,p\}_{Q,P} = \cos^2 Q + \sin^2 Q = 1$$ **<u>la transformation est canonique</u>**.

4. Ecrire les équations de Hamilton du système.

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega^2.q^2$$

En remplaçant q et p.

$$H(Q,P) = \frac{1}{2m}2m\omega.P.\cos^2 Q + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{2P}{m\omega}\sin^2 Q = \omega.P.(\cos^2 Q + \sin^2 Q)$$

D'où

$$\boxed{H(Q,P) = \omega.P}$$

5. Equations de Hamilton.

$$\begin{cases} Q^{\bullet} = \dfrac{\partial H}{\partial P} = \omega \\ P^{\bullet} = -\dfrac{\partial H}{\partial Q} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = \omega t + Q_0 \\ P = P_0 \end{cases}$$

Q_0 et P_0 sont des constantes d'intégrations déterminée à partir des conditions initiales.

6. Solution en q et p. En remplaçant :

$$\boxed{q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\sin Q = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}}.\sin(\omega t + Q_0)}$$

et

$$\boxed{p = \sqrt{2m\omega.P}.\cos Q = \sqrt{2m\omega.P_0}.\cos(\omega t + Q_0)}$$