FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

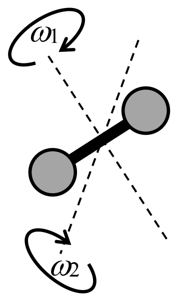
UNITÉ : PHYSIQUE STATISTIQUE
DURÉE : 02 HEURES.

EXERCICE 01: (07 *points*)

Dans le cas d'un gaz parfait composé de N molécules monoatomiques sans interaction la fonction de distribution des vitesses est donnée par :

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\beta m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$

1. Montrer que la valeur moyenne $\langle\vec{v}\rangle$ du vecteur vitesse est nulle.
2. Trouver la relation donnant l'énergie interne $U(T)$ en fonction de la température.
3. En déduire la capacité calorifique à volume constant C_v.
4. En considérant les chocs des particules sur une paroi donné, calculer la pression P qu'exerce un tel gaz sur la paroi.



Dans le cas d'un gaz parfait diatomique l'énergie cinétique d'une particule s'écrit :

$$E_C = \frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right) + \frac{1}{2}I(\omega_1^2+\omega_2^2)$$

$E_{CT} = \frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)$: énergie cinétique de translation.

$E_{CR} = \frac{1}{2}I(\omega_1^2+\omega_2^2)$: énergie cinétique de rotation suivant deux axes (figure 1.).

En écrivant la fonction de distribution sous la forme $f\left(v_x,v_y,v_z,\omega_1,\omega_2\right) = A.e^{-\beta E_C}$.

5. Calculer A pour que cette fonction soit normée.
6. Trouver la relation donnant l'énergie interne $U(T)$ en fonction de la température.
7. En déduire la capacité calorifique à volume constant C_v.

EXERCICE 02: (07 *points*)

On modélise un solide cristallin par $N \gg 1$ particules *indépendantes* (ions ou atomes) vibrant autours de leurs positions moyennes avec la même pulsation ω. On suppose ce solide en équilibre thermique avec un thermostat de température T.

On rappelle que l'énergie de vibration d'un oscillateur harmonique de pulsation ω s'écrit :

$$\epsilon_{n,p,q} = \hbar\omega(n+p+q)$$

n, p, q sont les trois nombres quantiques associés aux trois degrés de vibration. $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$.

1. Doit-on considérer les particules comme discernables ou indiscernables ? Exprimer la fonction de partition du cristal Z à l'aide de la fonction de partition z d'une particule.
2. Calculer z et montrer que z ne dépende que de $\frac{\theta_E}{T}$ où θ_E est une température caractéristique (dite « température d'Einstein » ou « température de vibration ») que l'on définira.
3. En déduire l'énergie interne U du solide.
4. Quelle est l'énergie moyenne d'une particule lorsque $T \gg \theta_E$?
5. Exprimer la capacité thermique à volume constant $C_V(T)$ que l'on tracera en fonction de la température.
6. Vers quelle valeur tend $C_V(T)$ lorsque $T \gg \theta_E$?
7. Calculer l'énergie libre F du cristal formé par ces N particules.
8. En déduire l'entropie S du système.

<u>EXERCICE 03:</u> (06 *points*)

On considère un cristal composé de N atomes indépendants et discernables. Chaque atome peut être dans trois états distincts. Dans chacun de ces états, l'atome possède un moment magnétique m_z différent sivant l'axe (OZ) définit par un champ magnétique externe $\vec{B} = B.\vec{e}_z$.

Dans le premier état $m_z = +1$; dans le deuxième état $m_z = 0$; dans le troisième état $m_z = -1$.

Et l'énergie de chaque atome est donné par :

$$\epsilon = -\alpha B m_z$$

Où α est une constante. (α et B sont positifs)

1. Discuter qualitativement quel sera l'état de plus basse énergie.
2. Calculer la fonction de partition Z des N atomes.
3. Trouver l'énergie interne U du système de N atomes et en déduire l'aimantation moyenne M_z .
4. Montrer que dans le cas où B est petit, M_z est proportionnelle à B. Le coefficient de proportionnalité est appelé susceptibilité magnétique χ.
$$M_z = \chi B \qquad \text{Pour} \qquad B \ll 1.$$
Calculer χ. Comment se comporte χ quand la température tend vers 0 ?
5. Calculer l'énergie libre F et l'entropie S du système. Discuter les valeurs limites de $S(T)$ quand $T \to \infty$ et $T \to 0$.

On peut utiliser :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right)$$