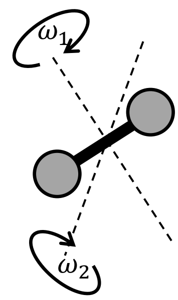
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : PHYSIQUE STATISTIQUE
DURÉE : 01 HEURE 30 MINUTES.

EXERCICE 01: (06 *points*)



Dans le cas d'un gaz parfait diatomique l'énergie cinétique d'une particule s'écrit :

$$E_C = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + \frac{1}{2}I(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

$E_{CT} = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$: énergie cinétique de translation.

$E_{CR} = \frac{1}{2}I(\omega_1^2 + \omega_2^2)$: énergie cinétique de rotation suivant deux axes (figure 1.).

En écrivant la fonction de distribution sous la forme $f\left(v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2\right) = A.e^{-\beta E_C}$.

1. Calculer A pour que cette fonction soit normée.
2. Trouver la relation donnant l'énergie interne $U(T)$ en fonction de la température.
3. En déduire la capacité calorifique à volume constant C_V.

EXERCICE 02: (14 *points*)

La chaleur spécifique du composé Fe_2VAl a été mesurée en présence d'un champ magnétique, elle représenté à basses températures dans la figure 1.

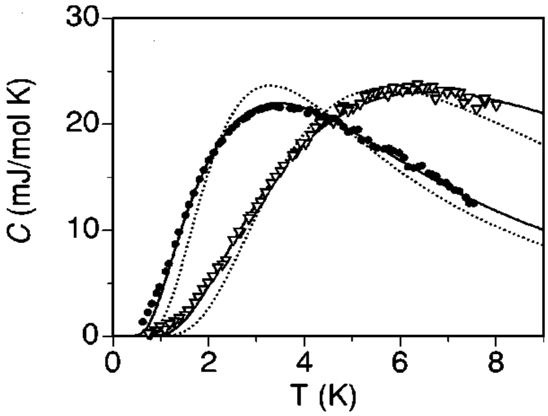


***Figure 1 :** Chaleur spécifique du composé Fe_2VAl à basses températures dans un champ magnétique $B = 4\,Tesla$ (cercles) et $B = 8\,Tesla$ (triangles), comparée au modèle à deux niveaux (pointillés avec $\epsilon = 1{,}1\,\mu_B.B$) et au modèle à n niveaux (traits pleins avec $\epsilon = 1{,}93\,\mu_B.B$ et $n = 3$). (D'après Physical Review B, **60**, R13941, (1999)).*

Les chercheurs qui ont effectués ces mesures ont tenté de les interpréter par la présence de défauts magnétiques dans la structure en utilisant deux modèles différents.

MODÉLISATION A 2 NIVEAUX

Dans cette approche, on considère que les défauts sont indépendants (sans interaction), localisés spatialement (discernables), et qu'ils ne peuvent se trouver que dans deux états d'énergie que l'on note ϵ_0 et ϵ_1 $(\epsilon_1 > \epsilon_0)$. Le composé est maintenu à la température T.
En posant $\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_0$.

1. Calculer la fonction de partition canonique z d'un seul défaut en fonction de ϵ_0, ϵ et de $\beta = 1/k_B T$.
2. Exprimer la fonction de partition canonique Z correspondant à N défauts.
3. Calculer l'énergie interne du système U.
4. A partir de 2. déduire que l'énergie libre F du système de N défauts s'écrit :
$$F = N\epsilon_0 - Nk_B T.\,ln\left(1 + e^{-\beta\epsilon}\right)$$
5. En déduire l'entropie du système S.
6. Retrouver l'expression de l'énergie interne à partir de F et de S.
7. A partir de l'expression de l'énergie U discuter physiquement les occupations des niveaux ϵ_0 et ϵ_1 dans les cas où $T \to 0$ et $T \to \infty$.

8. Montrer que la chaleur spécifique à volume constant C_V s'écrit :

$$C_V = Nk_B \left(\frac{\beta\epsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{ch}^2(\beta\epsilon/2)}$$

MODELISATION A n NIVEAUX

Sous les mêmes hypothèses d'indépendance et de localisation, on suppose maintenant que les défauts magnétiques peuvent occuper n états d'énergie notés $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n$. En plus, on supposera que ces niveaux d'énergies sont équidistants $\epsilon_p = \epsilon_0 + p.\epsilon$ avec $p = 0, \dots, n$ (ϵ est l'écart entre deux niveaux successifs).

1. Calculer la fonction de partition z d'un seul défaut. On utilise : $1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
2. Montrer que l'énergie libre f associée à un seul défaut peut s'écrire :

$$\beta.f = \beta\left(\epsilon_0 + \frac{n\epsilon}{2}\right) - ln\left[\mathrm{sh}\left((n+1)\frac{\beta\epsilon}{2}\right)\right] + ln\left[\mathrm{sh}\left(\frac{\beta\epsilon}{2}\right)\right]$$

3. Calculer l'énergie interne U du système.
4. Des deux questions précédentes calculer l'entropie S du système.
5. Montrer que la chaleur spécifique à volume constant est donnée C_V par l'expression :

$$C_V = -k_B\beta^2 \frac{\partial U}{\partial \beta}$$

6. Calculer C_V en fonction de β de ϵ et de n.